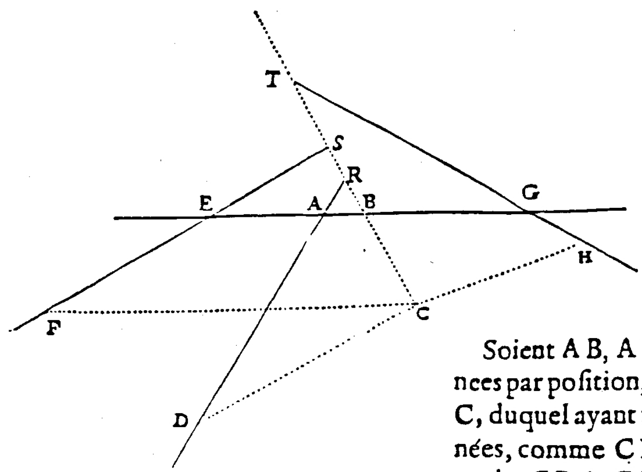
Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 1 Abgabetermin : Freitag, 17.10.2014, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)



Soient A B, A D, E F, G H, &c. pluſieurs lignes don-
nees par poſition, & qu'il faille trouuer vn point, comme
C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites ſur les don-
nées, comme C B, C D, C F, & C H, en ſorte que les
angles C B A, C D A, C F E, C H G, &c. ſoient donnés,
& que ce qui eſt produit par la multiplication d'vne par-
tie de ces lignes, ſoit eſgal a ce qui eſt produit par la mul-
tiplication des autres, oubien qu'ils ayent quelque autre
proportion donnée, car cela ne rend point la queſtion
plus difficile.

René Descartes, La Géométrie, Livre Premier, Paris 1637

Aufgabe 1 (Darstellungsformen von Geraden)

Gegeben einen Stützvektor $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und einen Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq 0$, dann schreibt sich eine Gerade $G_{p,v}$ in der *Parameterdarstellung* als

$$G_{p,v} = \{p + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\} .$$

(i) Zeigen Sie für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$:

$$G_{p,v} = G_{p,\alpha v}, \tag{1}$$

$$G_{p,v} = G_{p+\beta v,v}. \tag{2}$$

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $ab \neq 0$ schreibt sich eine Gerade $K_{a,b,c}$ in der *Achsenabschnittsform* als

$$K_{a,b,c} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\right\}.$$

Für $\lambda \neq 0$ gilt offenbar

$$K_{a,b,c} = K_{\lambda a, \lambda b, \lambda c}. \tag{3}$$

(ii) Gegeben seien die Punkte $A = (5, 3)$ und $B = (1, 2)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Schreiben Sie die Gerade durch die Punkte A und B in Parameterdarstellung und in Abschnittsform.

Aufgabe 2 (Schnittpunkt zweier Geraden)

Gegeben seien die beiden Geraden $G_{p,v}$ und $G_{q,w}$ mit

$$p = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden, indem Sie das zugehörige Gleichungssystem der Parameterdarstellungen lösen.

Aufgabe 3 (Skalarprodukt und Schnittpunkt zweier Geraden)

Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ in der Ebene ist erklärt durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Damit erhält man die Länge eines Vektors x und den Winkel α zwischen zwei Vektoren $x, y \neq 0$ durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \text{und} \qquad \cos\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

wobei $0 \leq \alpha \leq \pi$ gemeint ist. Offenbar ist $\langle x, y \rangle = 0$ für zwei $x, y \neq 0$ genau dann, wenn x und y orthogonal sind. Wir bezeichnen mit $x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ den Vektor, der aus $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ durch Links-Drehung um $\pi/2$ hervorgeht. Offenbar ist $\langle x, x^\perp \rangle = 0$.

Zeigen Sie, dass für den (Orstvektor des) Schnittpunkt(s) s der Geraden $G_{p,v}$ und $G_{q,w}$ mit $\langle v, w^\perp \rangle \neq 0$ gilt:

$$s = \frac{1}{\langle v, w^\perp \rangle}(\langle q, w^\perp \rangle v - \langle p, v^\perp \rangle w).$$

Setzen Sie dazu den Schnittpunkt als $s = av + bw$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an. (N.B.: Wir werden später sehen, dass wir jeden Punkt in $\mathbb{R}^2$ in der Form $s = av + bw$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben können, da v und w nicht parallel und $\neq 0$ sind.)

Aufgabe 4 (Hesse-Form und Abstand zwischen Punkt und Gerade)

Eine Gerade $H_{q,\alpha}$ in *Hesse-Form* oder *Normalenform* schreibt sich mit $0 \neq q \in \mathbb{R}^2, \|q\| = 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ wie folgt:

$$H_{q,\alpha} = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, q \rangle = \alpha\right\}.$$

(Hierbei ist $\langle \ , \ \rangle$ das Skalarprodukt aus Aufgabe 3.) Es gilt natürlich $H_{-q,-\alpha} = H_{q,\alpha}$.

(i) Geben Sie die Gerade durch die Punkte $A = (5, 3)$ und $B = (1, 2)$ aus Aufgabe 1 in Hesse-Form an.

(ii) Berechnen Sie zunächst den lotrechten Abstand zwischen einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und der Geraden $H_{q,\alpha}$.

(iii) Sei φ ein Winkel mit $0 < \varphi < \pi$; berechnen Sie den Abstand von P zu $H = H_{q,\alpha}$ unter dem Winkel φ (d.h. die Länge der Strecke von P nach $Q \in H$, wenn die Gerade durch P und Q die Gerade H mit dem Winkel φ schneidet).

***-Aufgabe 5** (Pappus-Problem für 4 Geraden)

Gegeben seien vier Geraden A, B, C und D in der Ebene, weiter vier Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, alle zwischen 0 und π. Für einen beliebigen Punkt $P = (x, y)$ seien a, b, c bzw. d der Abstand von P zu A, B, C bzw. D, jeweils unter dem Winkel α, β, γ bzw. δ.

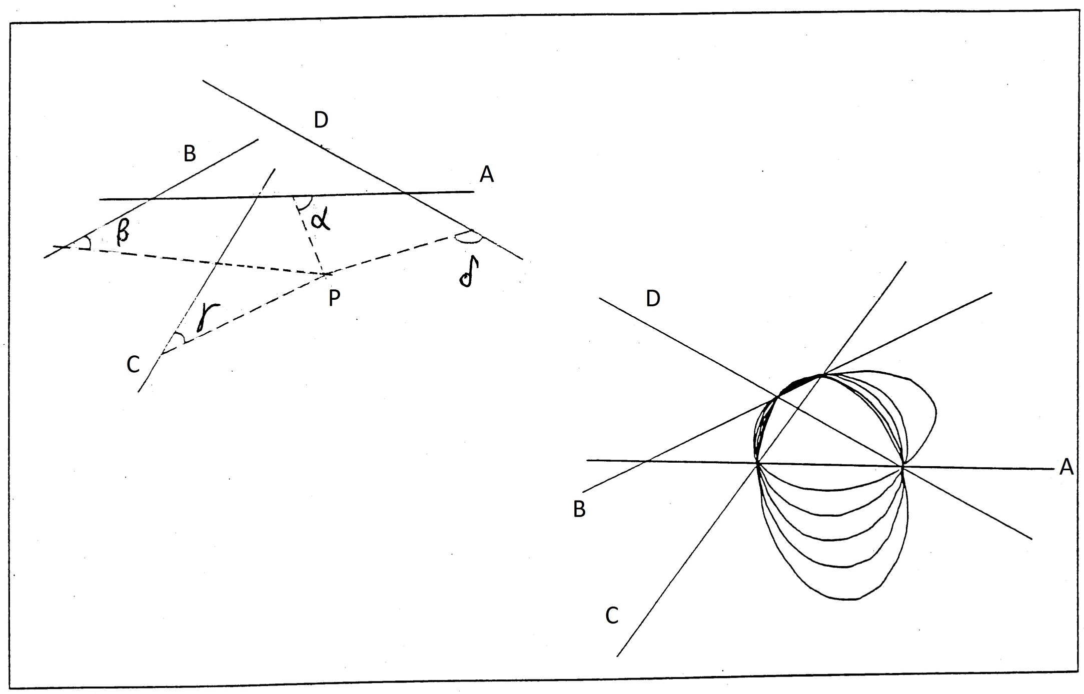
Betrachten Sie die Gleichung

$$a\,b = \lambda \cdot c\,d \tag{4}$$

für einen gegebenen Proportionalitätsfaktor λ.

Zeigen Sie: Der Ort aller Punkte P, deren Abstände die Gleichung (4) erfüllen, ist ein Kegelschnitt.

Hinweis: 1. Betrachten Sie die vier Geraden als in Hesse-Form gegeben. 2. Drücken Sie den Abstand a von $P = (x, y)$ zu A unter dem Winkel α durch x und y aus; genauso für die anderen Geraden. 3. Die Gleichung (4) ist damit (bei festen A, B, C, D und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sowie λ) eine Gleichung in x und y. 4. Es zeigt sich, dass diese Gleichung außer einem konstanten Term nur Terme in x und in y, Terme in x^2 und y^2 sowie in xy enthält, aber keine höheren Potenzen.



(a): Pappus-Problem für $n = 4$ (b) Ortskurven für verschiedene Proportionalitätsfaktoren λ