

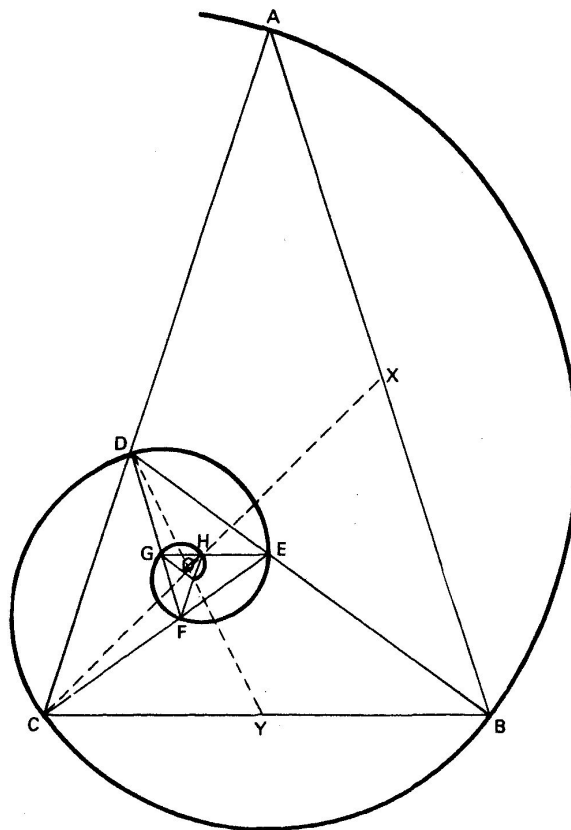
Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödighheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 6

Abgabetermin : Freitag, 21.11.2014, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)



Logarithmische Spirale mit goldenen Dreiecken

aus: H.E. Huntley: The Divine Proportion. A Study in Mathematical Beauty

Aufgabe 26 (Lineare Abbildungen)

Man prüfe, ob die folgenden Abbildungen linear sind:

(i) mit einer Rechnung:

- $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (z_1, z_2) \mapsto (z_1 - 2z_2, \frac{i}{i+1}z_2).$
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (xz, yz).$
- $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (\lambda x_1, -\lambda^2 x_2 + \lambda^3 x_3), \quad \lambda \in \mathbb{K}.$

(ii) mit einem geometrischen Argumenten:

- $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, Drehung um den Ursprung 0 mit dem Winkel α .
- $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, Spiegelung an der Hyperebene $H := \{x | x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.
- $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, schräge Projektion auf die Gerade $\Gamma = \{ax + by = 0 | x, y \in \mathbb{R}\}$ mit dem Winkel $\theta = 39,7^\circ$.

(iii) mit analytischen Argumenten:

- $\Phi : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \Phi(f) = 2f - f' + \lambda f''^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$
- $\Phi : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(f) = 2f(0) - f'(1).$
- $\Phi : L^1([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(f) = \int_0^1 f(t)dt + \frac{1}{6} \int_0^{1/2} f(2t)dt.$

(iv) mit algebraischen Argumenten:

- $\Psi : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}, p \mapsto p(0) + 2p(1).$
- $\Psi : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x], p \mapsto p'.$
- $\Psi : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}, p \mapsto (a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n)^2.$

Aufgabe 27 (Lineare Unabhängigkeit)

Sei $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung des Vektorraums V auf sich selbst und $v \in V$, so daß für eine natürliche Zahl n gilt: $f^n(v) \neq 0$ und $f^{n+1}(v) = 0$. Beweisen Sie, daß dann $v, f(v), \dots, f^n(v)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 28 (Lineare Unabhängigkeit von Primzahllogarithmen)

Wir betrachten $V = \mathbb{R}$ als rationalen Vektorraum. Gegeben seien n verschiedene Primzahlen $p_1, \dots, p_n$. Man zeige, daß die reellen Zahlen $\xi_i = \log p_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. (Woraus folgt, daß höchstens eine von ihnen rational sein kann. Warum?)

Aufgabe 29 (Basen für Unterräume)

(i) Man finde eine Basis für die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, auf welcher der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

(i) Man finde eine Basis für den von $a = \begin{pmatrix} 2i+1 \\ -\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3}-i \\ i \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum U von $\mathbb{C}^4$.

*-Aufgabe 30 (Potenzieren statt Rekurrenzen)

Für den Körper $\mathbb{K}$ sei V der Folgenraum

$$V = \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{K} := \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) | x_i \in \mathbb{K}\}.$$

Wir betrachten die Rekursionsgleichung

$$a_0x_k + a_1x_{k+1} + \dots + a_{n-1}x_{k+n-1} = x_{k+n} \quad (1)$$

für vorgegebene Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Es sei $U \subseteq V$ der Unterraum aller Folgen $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, die für alle k die Rekursionsgleichung (1) erfüllen.

(i) U ist ein linearer Unterraum.

(ii) Nun machen wir einen gewagten Schritt und betrachten kurzerhand einmal das Polynom

$$f(X) = X^n - a_0 + a_1X - a_2X^2 - \dots - a_{n-1}X^{n-1}$$

und denken uns dabei $x_k = X^k$, so daß aus (1) die Gleichung

$$f(X)X^k = 0 \quad (2)$$

wird; wir suchen deshalb (außer der offensichtlichen Nullstelle von (2) bei 0) auch die anderen Nullstellen von f .

Tatsächlich gilt:

(iii) Ist $\zeta \in \mathbb{K}$ und $f(\zeta) = 0$, so ist $x = (1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \dots, \zeta^i, \dots)$ in U .

(iv) Sind $\zeta_1, \dots, \zeta_l$ verschiedene Nullstellen von f in $\mathbb{K}$, so sind die Folgen $x^{(i)} = (1, \zeta_i, \zeta_i^2, \dots)$ für $i = 1, \dots, l$ linear unabhängig. Hat f die n verschiedenen Nullstellen $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ in $\mathbb{K}$, so sind die $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ eine Basis.

(v) Es gibt einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{K}^n &\longrightarrow U \subseteq V \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) &\longmapsto \rho = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_i, \dots) \end{aligned}$$

wobei jedes $\rho_i = \rho_i(x_0, \dots, x_{n-1})$ eine Funktion von $x_0, \dots, x_{n-1}$ ist und diese ρ_i wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \rho_0(x_0, \dots, x_{n-1}) &= x_0 \\ &\vdots \\ \rho_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) &= x_{n-1} \\ \rho_{n+k}(x_0, \dots, x_{n-1}) &= a_0\rho_k(x_0, \dots, x_{n-1}) + a_1\rho_{k+1}(x_0, \dots, x_{n-1}) + \dots + a_{n-1}\rho_{k+n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Angenommen, wir hätten ein unendliches LGS mit Variablen $\dots, x_{n+k}, \dots, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$ und einer unendlichen Matrix, die wie folgt aussieht (und also bereits Zeilenstufenform hat):

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 \\ & & & & & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Was wäre der Lösungsraum?

- (vi) Die berühmteste Rekursionsgleichung führt zur Fibonacci-Folge: $F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, \dots$; d.h. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, n = 2$ und

$$x_k + x_{k+1} = x_{k+2}. \quad (3)$$

Also $\rho(1, 1) = (1, 1, 2, 3, 5, \dots)$. Untersuche das zu (3) gehörige Polynom f , suche seine Nullstellen ζ_1, ζ_2 (welche verschieden sind). Welche Folgen sind $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$? Man schreibe dann die Fibonacci-Folge als Linearkombination von $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, also $F = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}$ mit geeigneten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, also $F_j = \lambda_1 \zeta_1^j + \lambda_2 \zeta_2^j$ für jedes j .

The Fibonacci numbers reappear in connection with the ideally simplified atoms of a quantity of hydrogen gas.

Suppose that the single electron in one of the atoms is initially in the ground level of energy and that it gains and loses, successively, either one or two quanta of energy, so that the electron in

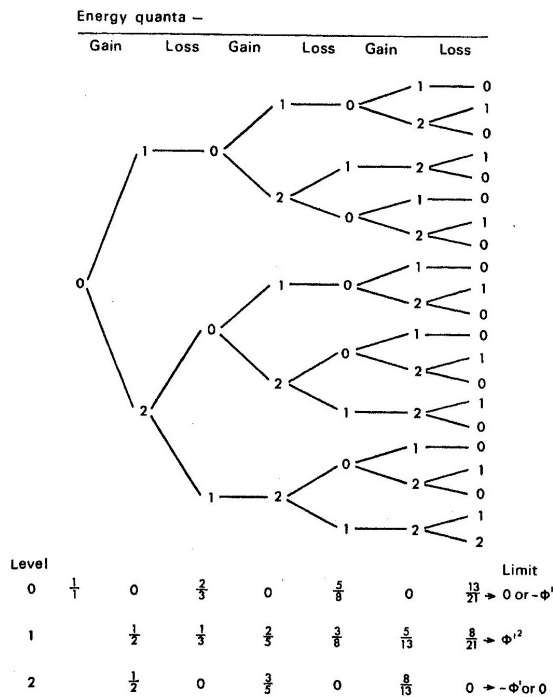


Fig. 12.2. Possible histories of an atomic electron. These fractions, formed of Fibonacci numbers, show the proportion of atoms in each state as time passes. The number of possible different histories of an electron are also members of the Fibonacci sequence:

1 2 3 5 8 13 21 ...

its history occupies either the ground level (state 0), the first energy level (state 1), or the second energy level (state 2). In this idealized case the number of different possible histories of an atomic electron is a Fibonacci number (Fig. 12.2, p. 156).

Let us make the following assumptions:

1. When the gas gains radiant energy, all the atoms in state 1 rise to state 2; half the atoms in state zero rise to state 1 and half to state 2.
2. When the gas loses energy by radiation, all the atoms in state 1 fall to state zero; half those in state 2 fall to state 1 and half to state zero.

Figure 12.2 shows the successive fractions of the total number of atoms found in each state. These fractions are formed exclusively of Fibonacci numbers.

A point of interest is that the fraction of atoms in the intermediate energy level (state 1) remains constant at 38.2 per cent. If u_n is the n th term of the Fibonacci series, this fraction (38.2 per cent) is u_n/u_{n+2} as n tends to infinity.

$$\frac{u_n}{u_{n+2}} = 1 - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \rightarrow 1 + \phi'$$

i.e., 38.2 per cent. The symbols ϕ and ϕ' stand for the limits of u_{n+1}/u_n and u_n/u_{n+1} respectively as n tends to infinity. We have seen that they are the roots of the equation $x^2 - x - 1 = 0$.

aus: H.E. Huntley: The Divine Proportion. A Study in Mathematical Beauty