Aufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2014/15

Blatt 11 Abgabetermin : Freitag, 16.1.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

Anwendung bei der Lösung linearer Gleichungssysteme

Das Schur-Komplement kann zur Lösung von linearen Gleichungssystemen der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

eingesetzt werden. Dabei bezeichnen x und f Vektoren der Länge n und y und g Vektoren der Länge m. Ausgeschrieben lautet dieses Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} Ax + By &= f \\ Cx + Dy &= g \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung von links mit $-CA^{-1}$ und Addition zur zweiten Gleichung liefert

$$(D - CA^{-1}B)y = g - CA^{-1}f.$$

Wenn man also A und S invertieren kann, dann kann man diese Gleichung nach y auflösen und dann

$$Ax = f - By$$

berechnen, um die Lösung (x, y) des ursprünglichen Problems zu erhalten.

Die Lösung eines $(n + m) \times (n + m)$-Systems reduziert sich damit auf die Lösung eines $n \times n$- und eines $m \times m$-Systems.

Aus: Wikipedia-Artikel zum Schur-Komplement

Aufgabe 51 (Algorithmische Invertierung von Matrizen)

Seien a, b, c reelle Zahlen. Man berechne die Inversen der folgenden Matrizen:

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$.

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_2$.

(iii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 52 (Lineare und polynomiale Relationen)

(i) Es seien $f_1, \ldots, f_r : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen den $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W und seien $C_1, \ldots, C_r$ die zugehörigen Matrizen bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ von V und der Basis $\mathcal{B}$ von W, also $C_i = M_{\mathcal{BA}}(f_i)$ für $i = 1, \ldots, r$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ Skalare in $\mathbb{K}$.

Dann gilt $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r = 0$ genau dann, wenn $\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_r C_r = 0$ gilt.

(ii) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $C = M_{\mathcal{AA}}(f)$ die zugehörige Matrix bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ von V; und $\alpha_0, \ldots, \alpha_s$ seien Skalare in $\mathbb{K}$.

Dann gilt $\alpha_0 \mathrm{id}_V + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \ldots + \alpha_s f^s = 0$ genau dann, wenn $\alpha_0 \mathbb{1} + \alpha_1 C + \alpha_2 C^2 + \ldots + \alpha_s C^s = 0$ gilt.

(iii) Es sei in (i) dim $W = m$ und dim $V = n$ und X und Y eine invertierbare $m \times m$- bzw. $n \times n$-Matrix.

Gilt die lineare Relation in (i) für $C_1, \ldots, C_r$, so auch für $XC_1Y, \ldots, XC_rY$.

(iv) Es sei in (ii) dim $V = n$ und X eine invertierbare $n \times n$-Matrix.

Gilt die polynomiale Relation in (ii) für C, so auch für XCX^{-1}.

Aufgabe 53 (Normalform)

Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

in Normalform und schreiben Sie dadurch A als Produkt von Elementarmatrizen.

Aufgabe 54 (Elementarmatrizen und die Drehung um 90°)

Man beweise über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ für die Elementarmatrizen $E^{ij}[\lambda]$ der Größe $n \times n$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(E^{ij} \cdot (E^{ji})^{-1} \cdot E^{ij})^4 = \mathbb{1} \qquad \text{für } i \neq j.$$

Rechnen Sie diese Gleichung für 2×2-Matrizen e^{ij} für $n = 2$ einfach nach. Dann zeigen Sie, daß diese Gleichung auch für die $n \times n$ Elementarmatrizen mit Blockgestalt

$$E^{ij} = \begin{pmatrix} e^{ij} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

mit $i, j = 1$ bzw. 2 gilt. Für eine geeignete Permutationsmatrix $P = P^{-1}$ erhält man $E^{ij} = PE^{12}P^{-1}$. Und daraus folgt dann sofort die allgemeine Gleichung.

***-Aufgabe 55** (Schur[1]-Komplement)

Wir betrachten Blockmatrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit Matrizen A, B, C, D der Größen $n \times n$, $n \times m, m \times n$ bzw. $m \times m$; es sei dabei immer A als invertierbar angenommen. Bei der Gauß-Elimination (die sich zunächst auf die obere linke Matrix A konzentriert) entsteht im weiteren Verlauf die Matrix

$$S := D - CA^{-1}B,$$

die man als das *Schur-Komplement* von A in M bezeichnet. Offenbar ist

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ CA^{-1} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(i) M ist genau dann invertierbar, wenn A und S invertierbar sind und in diesem Falle gilt:

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -A^{-1}B \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -CA^{-1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(S) = n + \mathrm{rg}(S)$.

(iii) Nun nehmen wir an, daß A selbst eine Blockmatrix $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ mit A_1 invertierbar von der Größe $p \times p$, und damit die Matrizen A_2, A_3, A_4 von den Größen $p \times q, q \times p$ und $q \times q$ sind mit $p + q = n$. Wir haben

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ A_3 & A_4 & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen nun geschickter ein Schur-Komplement von A in M mit $M//A$ und wollen folgende Quotientenformel beweisen:

$$M//A = (M//A_1)//(A//A_1).$$

[1] Issai Schur (10. Januar 1875 - 10. Januar 1941), Mathematiker aus Russland, Student in Berlin, Professor in Bonn und Berlin; bekannt durch seine Beiträge zur Darstellungstheorie.