Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 13 **Abgabetermin : Montag, 8. Juli 2019**

Pierre Alphonse Laurent (1813 - 1854). *It was while Laurent was working on the construction project at Le Havre that he began to write his first mathematical papers. He submitted a memoir for the Grand Prize of the Académie des Sciences of 1842. His result was contained in a memoir submitted for the Grand Prize of the Académie des Sciences in 1843, but his submission was after the due date, and the paper was not published and never considered for the prize. Laurent died at age 41 in Paris. His work was not published until after his death. (aus dem englischen Wikipedia-Artikel).*

Aufgabe 13.1 (Laurent-Reihen)
Für einen Körper $\mathbb{K}$ definiert man durch $\mathbb{K}[[T, T^{-1}\ ]] = \mathbb{K}[[T, S]]/(TS = 1)$ den Vektorraum der *formalen Laurent-Reihen* als Menge aller formalen Ausdrücke

$$f(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n ,$$

bei denen unendlich viele positive wie negative Potenzen mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{K}$ vorkommen dürfen.

(i) Es ist klar, daß $\mathbb{K}[[T, T^{-1}\ ]]$ mit der koeffizientenweise Addition und Skalierung einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ bilden.

(ii) Auf dem Untervektorraum $\mathbb{K}((T))$ aller f mit $a_n = 0$ für fast alle negativen $n \in \mathbb{Z}$ definiere man eine Multiplikation, die ihn zu einem assoziativen und kommutativen Ring mit Einselement machen. Man nennt diesen Ring den *Laurent-Ring* über $\mathbb{K}$.

(iii) Man bestimme die invertierbaren Elemente von $\mathbb{K}((T))$.

(iv)* Unter welchen Voraussetzungen kann man eine Laurent-Reihe $g(T)$ in eine andere Laurent-Reihe $f(T)$ einsetzen und somit ein Kompositionsprodukt $f(g(T))$ bilden ?

(v)* Gibt es eine Lagrange-Inversionsformel ?

Aufgabe 13.2 (Laurent-Entwicklungen I)
Man untersuche die isolierte Singularität folgender Funktionen im Nullpunkt und finde den Hauptteil der Laurent-Entwicklung:

(a) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^n}$ für $n \in \mathbb{N}$,

(b) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)\sin(z^n)}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 13.3 (Laurent-Entwicklungen II)
Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ in den folgenden Ringgebieten in Laurent-Reihen:

(a) im Ringgebiet um 0 mit Radien $r = 0$ und $R = 1$,

(b) im Ringgebiet um 0 mit Radien $r = 1$ und $R = 2$,

(c) im Ringgebiet um 0 mit Radien $r = 2$ und $R = \infty$.

Aufgabe 13.4 (Fibonacci)
Wir betrachten die Fibonacci-Zahlenfolge a_n, die durch die lineare Rekursion $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ mit den Anfangswerten $a_0 = 1,\ a_1 = 1$ gegeben ist. Man zeige:
(a) Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ definiert (im Konvergenzbereich der Reihe) eine rationale Funktion, und zwar gilt

$$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}.$$

(b) Man benutze die Partialbruchzerlegung von f und folgere die Formel von Binet für die Fibonacci-Zahlen:

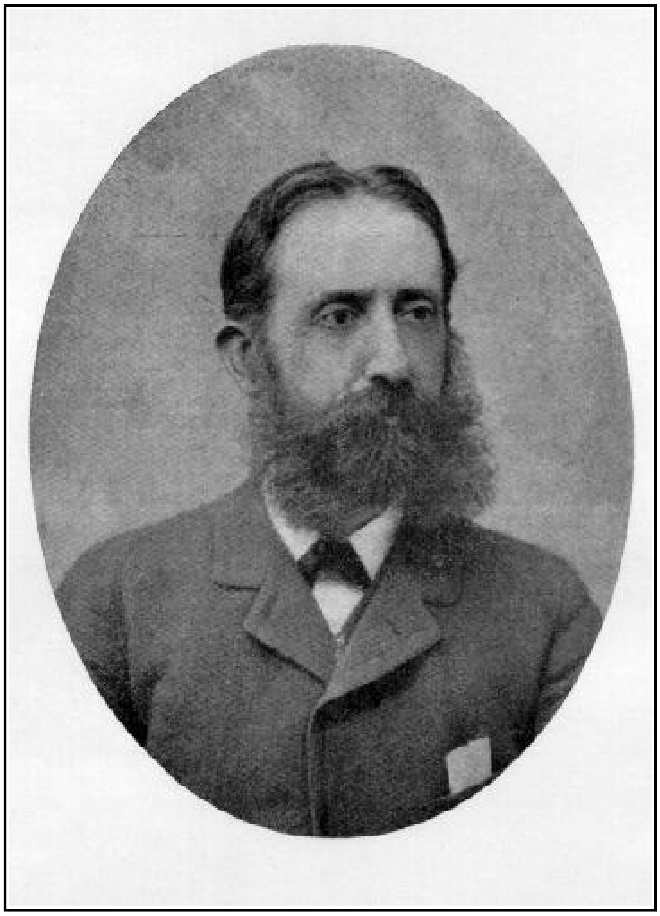
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

(c)* Gilt ein entsprechender Satz für jede Zahlenfolge, die durch eine allgemeine lineare Rekursion der Länge $r \geq 1$, also $a_n = \lambda_1 a_{n-1} + \ldots + \lambda_r a_{n-r}$ mit festen λ_i und vorgegebenen $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$, definiert ist? — Man finde zwei Polynome $P(z)$ und $Q(z)$, so daß die Relation $Q(z)\, f(z) = P(z)$ gilt.

Aufgabe 13.5* (Automorphismen von $\mathbb{C}$ und $\bar{\mathbb{C}}$)
Wir kennen die Möbius-Transformationen als Automorphismen, d.h. bi-holomorphe Selbstabbildungen, der vervollständigten komplexen Ebene $\bar{\mathbb{C}}$. Die affinen Möbius-Transformationen $f(z) = az + b$ sind offenbar Automorphismen von $\mathbb{C}$, weil man sie wegen $f(\infty) = \infty$ auf $\mathbb{C}$ einschränken kann. Wir wollen zeigen, daß es nur diese Automorphismen gibt, also $f \mapsto (b, a)$ ein Isomorphismus $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\bullet$ in das semi-direktes Produkt.

(1) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ also irgendein Automorphismus, dann ist $g(z) := f(z) - f(0)$ ein Automorphismus von $\mathbb{C}$ mit $g(0) = 0$ und $h(z) := g(1/z)$ ist ein Automorphismus von $\mathbb{C}^\bullet$.

(2) Es gibt ein $\delta > 0$ und ein C, so daß $|h(z)| > C$ gilt für alle $|z| < \delta$.



Felice Casorati (1835 - 1890), italienischer Mathematiker, hauptsächlich durch den Satz von Casorati-Weierstraß bekannt.

---

(3) Man folgere mit dem Satz von Casorati-Weierstraß: h hat keine wesentliche Singularität an der Stelle 0.

(4) Es sei $g(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von g an der Stelle 0; dann ist $h(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n}$ die Laurent-Entwicklung von h an der Stelle 0.

(5) Aus (3) folgt, daß $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_N z^N$ für ein gewisses N gilt, also daß $f(z)$ ein Polynom ist.

(6) Kann f mehrere Nullstellen haben ? — Nein ? Wenn das so ist, dann ist $f(z) = a(z - \zeta_0)^N$.

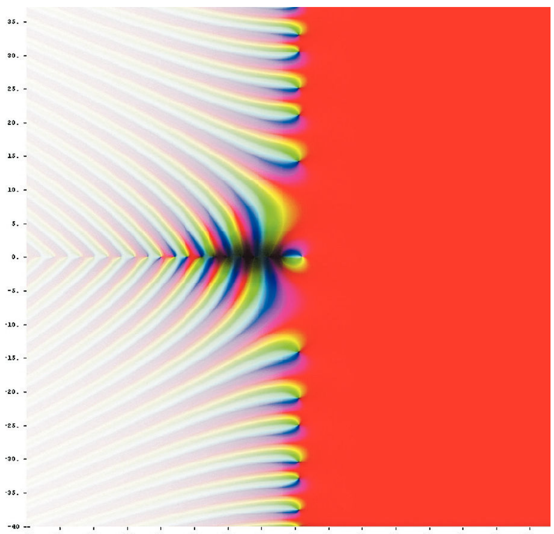
(7) Und kann $N > 1$ sein ? — Man sehe sich eine Umgebung von ζ_0 an.

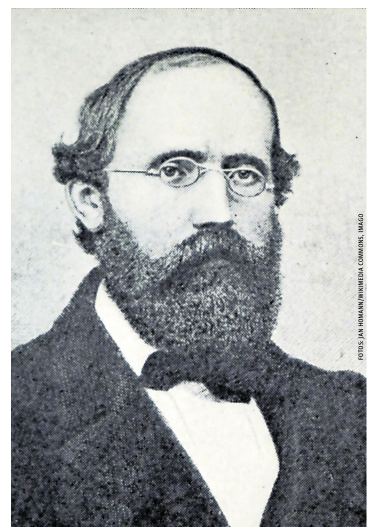
Bemerkung: Wir haben damit auch bewiesen, daß $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ die Gruppe der Möbius-Transformationen ist.

WISSEN

Riemanns Werk und Teufels Beitrag

Seit 160 Jahren versuchen Mathematiker, die rätselhafte Riemannsche Vermutung zu beweisen, um die Geheimnisse der Primzahlen zu verstehen. Jetzt gibt es endlich einen Fortschritt – aber wird das Problem jemals gelöst? Eine Geschichte über paradoxe Summen, verlorene Wetten und den Sog der Unendlichkeit





FOTOS: JAN HOMANN/WIKIMEDIA COMMONS, IMAGO

VON MARLENE WEISS

Ein erfolgreicher Mathematiker versucht viele Jahre lang, die Riemannsche Vermutung zu beweisen, eines der bedeutendsten Probleme der Mathematik. Schließlich gibt er auf und verkauft seine Seele an den Teufel, der im Gegenzug verspricht, binnen einer Woche den Beweis zu liefern. Der Mathematiker also bereitet sich auf den wichtigsten Moment seiner Karriere vor, lädt seine Kollegen ein und kündigt überall an, er habe das Problem gelöst. Aber dann kommt der große Tag – und der Teufel erscheint nicht. Der Mathematiker ist bis auf die Knochen blamiert.

Ein Witz, der so beginnt, kursiert unter Mathematikern in vielen Versionen – vielleicht angelehnt an die Kurzgeschichte „The Devil and Simon Flagg“ von Arthur Porges, in welcher der Teufel sich an einem anderen Problem versucht, das jedoch inzwischen gelöst wurde. Die Riemannsche Vermutung hingegen ist eines der sogenannten Millennium-Probleme, auf deren Lösung das US-amerikanische Clay-Institut ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt hat. Ruhm, Ehre und viel Geld wären jedem gewiss, der sie beweisen kann, doch bisher sind alle Versuche gescheitert. Jetzt aber scheint es womöglich nach langer Zeit wieder einen Fortschritt zu geben: Eine kürzlich in den *Proceedings of the National Academy of Sciences* (PNAS) erschienene Arbeit könnte einen neuen Ansatz für den ersehnten Beweis liefern. Experten sprechen von einem Durchbruch.

Seit 160 Jahren versuchen sich Mathematiker mit wachsender Frustration an einem Beweis. Dabei hätte eine Lösung wohl keinerlei Auswirkungen auf den Alltag, Anwendungsmöglichkeiten sind schwer vorstellbar. Dennoch ist das Problem für Mathematiker eines der drängendsten überhaupt, denn es betrifft das Wesen der Zahlen an sich.

Die Riemannsche Vermutung ist für Nicht-Mathematiker sehr kompliziert. Trotzdem der Versuch einer Erklärung: Am Anfang steht die sogenannte Zeta-Funktion, die schon Leonhard Euler im 18. Jahrhundert untersuchte. Bis heute hat sie nichts von ihrer Faszination verloren. Es geht um Summen aus unendlich vielen Zahlen, wie 1+1/2+1/3+1/4+1/5 und so weiter, beziehungsweise das Gleiche mit Quadratzahlen: 1+1/4+1/9+1/16 … Wenn die einzelnen Zahlen schnell genug kleiner werden, weil im Nenner Quadratzahlen oder noch höhere Potenzen stehen, können solche Summen einen endlichen Wert annehmen, obwohl sie aus unendlich vielen Einzelwerten bestehen. Es ist wie wenn man sich einer Wand annähert, indem man die verbleibende Distanz mit jedem Schritt halbiert: Je länger man läuft, desto näher kommt man ihr, auch wenn man sie niemals ganz erreichen wird. Die Zeta-Funktion gibt diesen Wand-Wert für eine ganze Klasse solcher Summen aus.

Die Reihe 1+1/2+1/3+1/4+1/5+… jedoch wächst langsam aber sicher bis ins Unendliche. Das gilt natürlich erst recht für ganzzahlige Reihen wie 1+2+3+4+ … oder gar 1+4+9+16+…, welche die Zeta-Funktion ebenfalls umfasst. Man muss kein Mathematiker sein, um zu erkennen, dass solche Rechenaufgaben direkt ins Unendliche führen.

Und doch kann man dank der mysteriösen Zeta-Funktion auch solchen Summen einen Sinn geben – auch wenn das für mathematisch unbelastete Menschen schwer nachzuvollziehen ist. Für die Summe aller natürlichen Zahlen beispielsweise, also 1, 2, 3, 4, 5 und so fort, spuckt die Zeta-Funktion den Wert -1/12 aus. Das ist natürlich Quatsch – wie sollte eine Summe aus ganzen, positiven Zahlen einen negativen Bruch ergeben? Einerseits. Andererseits kann man mit ein paar mathematischen Tricks sozusagen den unendlichen Teil der Summe wegzaubern, sodass -1/12 übrig bleibt. Etwas Ähnliches tun Physiker oft, um Berechnungen einen Sinn zu geben, bei denen zunächst nur „Unendlich“ herauskommt.

Man kann sein Leben lang behaupten, die Summe der natürlichen Zahlen sei -1/12 – und wird damit nie in Schwierigkeiten geraten

Das Wichtige dabei: Dieser Prozess ist widerspruchsfrei; egal wie man es anstellt, man kommt immer zum gleichen, eindeutigen Ergebnis. So gesehen kann man sein Leben lang behaupten, die Summe der natürlichen Zahlen sei -1/12 – man wird damit nie in ernsthafte Schwierigkeiten geraten, jedenfalls in keine mathematischen. Dass Nicht-Mathematiker jeden für bekloppt erklären, der so etwas erzählt, steht auf einem anderen Blatt.

Bernhard Riemann und seine Zeta-Funktion: Rechts passiert nicht viel, links ist es bunt. Auf der senkrechten Linie dazwischen liegen die interessanten Nullstellen – aber nur dort?

Für Mathematiker wird die Zeta-Funktion jedoch erst dann richtig spannend, wenn man sie nicht auf die herkömmliche Zahlengerade beschränkt, sondern auf die zweidimensionale Ebene der sogenannten komplexen Zahlen erweitert. Dort gibt es nämlich unzählige Punkte, an denen die Zeta-Funktion den Wert Null ausgibt. Und die Verteilung dieser Punkte wiederum hängt auf geradezu magische Weise mit der Verteilung der Primzahlen zusammen, jener Zahlen also, die sich nur durch 1 und sich selbst teilen lassen. Diesen Zusammenhang erkannte 1859 der deutsche Mathematiker Bernhard Riemann, nach dem die Vermutung benannt ist.

Riemann starb schon mit 39 Jahren an Tuberkulose, aber in seinem kurzen Leben leistete er enorme Beiträge zu Funktionentheorie und Geometrie, die bis heute prägend für Mathematik und Physik sind. So fiel ihm auf, dass die Nullstellen der Zeta-Funktion alles andere als zufällig über die Ebene der komplexen Zahlen verteilt sind, sondern offenbar alle genau auf einer senkrechten Geraden liegen. Dass es von dieser Regel tatsächlich keine Ausnahme gibt, ist die berühmte Riemannsche Vermutung. „Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen“, schrieb Riemann dazu; „ich habe indeß die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen.“

Für heutige Mathematiker muss dieser Satz wie Hohn klingen, denn schon ganze Karrieren wurden dem Versuch gewidmet, die Vermutung zu beweisen – alles vergeblich. Erst im vergangenen Herbst hatte der inzwischen im Alter von 89 Jahren verstorbene Fields-Medaillen-Träger Sir Michael Atiyah einen Beweis angekündigt. Doch nach seinem knappen Vortrag in Heidelberg waren Kollegen eher betreten, der Ansatz des großen Mathematikers galt schnell als widerlegt. Die neue Arbeit in PNAS jedoch macht manchen Experten neue Hoffnung. Einer der Autoren ist der renommierte Mathematiker Don Zagier vom Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn.

Zagier hat viele Freunde unter Mathematikern, und zu seinem 65. Geburtstag machten ihm ein paar Kollegen zwei Geschenke, wie sie wohl nur wenigen Menschen Freude bereiten: eine Konferenz zu seinen Ehren. Und zusätzlich ein kleines, vereinfachtes Übungsproblem, das der US-Mathematiker Ken Ono kurz vor der Konferenz an Zagier übergab. Ob ihm etwas dazu einfiele? Zagier machte sich begeistert an die Arbeit – wie man halt so Geburtstag feiert –, und hatte bald eine Lösung gefunden.

Zagiers Ergebnis wandten Ono und zwei seiner ehemaligen Doktoranden auf die sogenannten Jensen-Polynome an, die mit Riemanns Vermutung in enger Verbindung stehen. So konnten sie zeigen, dass eine Untergruppe dieser Ausdrücke eine bestimmte Eigenschaft hat. Wenn man diese auch für eine weitere Gruppe zeigen könnte, wäre die Vermutung bewiesen. Es könnte sich also lohnen, diesen eigentlich längst verworfenen Ansatz weiter zu verfolgen.

Mit Computern haben Mathematiker Milliarden Nullstellen der Zeta-Funktion berechnet, keine tanzt aus der Reihe

„Endlich haben wir einen weiteren großen Schritt in die richtige Richtung“, schreibt der Experte Enrico Bombieri in einem enthusiastischen Begleitkommentar. Zagier selbst ist da skeptischer: „Ich finde unsere Arbeit sehr hübsch“, sagt er. Aber er glaubt nicht, dass sie einen Beweis näher rücken lässt: „Um die Riemannsche Vermutung zu beweisen, müsste man schon etwas sehr Geheimes über die Zeta-Funktion wissen, dafür ist unsere Aussage viel zu allgemein.“ Allerdings arbeitet er selbst eigentlich auf einem anderen Gebiet. Gut möglich also, dass er seine eigene Arbeit in dieser Hinsicht etwas zu negativ sieht.

Vorerst jedenfalls geht die Suche weiter. Mit Computern haben Forscher mittlerweile Milliarden Nullstellen der Zeta-Funktion berechnet, keine einzige tanzt aus der Reihe. Auch deshalb ist Don Zagier inzwischen absolut überzeugt, dass die Vermutung stimmt – unabhängig davon, ob sie jemals bewiesen wird. Das war nicht immer so: Einst hat er mit Enrico Bombieri gegen die Vermutung gewettet. Zwei Flaschen guten Rotwein hat es ihn gekostet, dass die Nullstellen-Sammler kein Gegenbeispiel gefunden haben.

Aber man wird die Vermutung nie beweisen können, indem man Nullstellen sammelt. Denn dafür müsste man unendlich viele Nullstellen zusammentragen. Doch ist es nun mal ein weiter Weg bis unendlich, wie Jörn Steuding sagt, Zahlentheoretiker an der Uni Würzburg. Dabei meint Steuding wie viele andere Experten, dass es im Grunde gar nicht so entscheidend ist, ob die Vermutung stimmt oder nicht. Mathematisch wäre es zwar interessant, falls sie doch falsch sein sollte, sagt Steuding, darüber werde eigentlich zu wenig nachgedacht. Aber das hätte kaum praktische Konsequenzen. Dann wären die Primzahlen eben minimal anders über das Reich der Zahlen verteilt. Na und?

Doch die theoretische Relevanz eines Beweises wäre groß. Nicht nur würden viele Aussagen automatisch folgen, von denen man schon weiß, dass sie wahr sind, wenn auch Riemanns Vermutung wahr ist. Mathematiker hoffen aber vor allem, dass sich ein Beweis verallgemeinern ließe. Letztendlich geht es bei den Primzahlen immer um das uralte Prinzip von Multiplikation und Division. Wie kann man Zahlen zerlegen und wieder zusammensetzen, was passiert dabei? Zwar wird seit Jahrtausenden multipliziert, aber so ganz ist noch immer nicht klar, was das wirklich bedeutet. „Vielleicht würde ein Beweis etwas Fundamentales über das Wesen der Multiplikation zeigen“, meint Steuding. „Es gibt die Hoffnung, dass er sich in ein größeres Bild fügen würde.“

Außerdem ist bei solchen Jahrhundert-Beweisen oft der Weg das Ziel. So wie 1994, als der britische Mathematiker Andrew Wiles in einem Mammutwerk den sogenannten „letzten Satz“ von Fermat bewies. Letztlich war für diesen Beweis ganz neue Mathematik nötig. Gebiete, die man bis dahin für ganz unterschiedlich gehalten hatte, mussten zusammengebracht werden. Selbst wenn die Riemannsche Vermutung also nie bewiesen werden sollte: Schon die Suche nach einem Beweis kann sehr produktiv sein.

So ist es auch in dem anfangs erwähnten Witz. Sechs Monate nachdem der Mathematiker seinen Ruf ruiniert hat, taucht der Teufel doch noch auf, allerdings ziemlich frustriert. „Tut mir leid, ich konnte es auch nicht beweisen“, sagt er zerknirscht. „Aber pass auf“, und seine Laune bessert sich schlagartig: „Ich glaube, ich habe ein paar wirklich interessante Sätze gefunden.“

Artikel von Marlene Weiss zur Riemannschen Vermutung, aus der Süddeutschen Zeitung vom 19.6.2019