Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 12 **Abgabetermin : Montag, 1. Juli 2019**

Karl Weierstraß (1815 – 1897) hat erst in Bonn ohne Abschluß Jura studiert und erst danach in Münster Mathematik und Physik studiert, diesmal mit Abschluß; er war dann zunächst Lehrer an verschiedenen Gymnasien und wurde erst 1856 Professor in Berlin. Er war einer der einflußreichsten Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Auf ihn gehen die meisten ϵ-δ-Definitionen der Analysis zurück, deren Klarheit heute als Standard gilt.

Aufgabe 12.1 (Konvergenzsatz von Weierstraß)
Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge von holomorphen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:
(i) f ist holomorph.
(ii) Für jedes $k \geq 0$ konvergiert die Folge $f_n^{(k)}$ der k-ten Ableitungen von f_n lokal gleichmäßig gegen die k-te Ableitung $f^{(k)}$ von f.

(Hinweis: Kann man Integration und Limes vertauschen? Dann könnte man den Integralsatz von Cauchy und den Satz von Morera benutzen. Für die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen muß man eine Abschätzung durchführen. — Bemerkung: Der Satz ist im Reellen falsch.)

Anwendung*: **Riemannsche ζ-Funktion**
Diese berühmte Funktion ist durch die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert. (Traditionell wird das Argument immer mit s und nicht mit z bezeichnet.) Wo ist diese Funktion überhaupt definiert und wo ist sie holomorph ? Wir setzen $f_n(s) := n^{-s} = \exp(-s \log n)$ für natürliches $n \geq 1$.

- f_n ist ein auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion, also eine ganze Funktion.
- Für $s = x + iy$ ist $|n^{-s}| = |\exp(-s \log n)| = n^{-x}$. (Vgl. Aufgabe ....)
- Ist $\epsilon > 1$ und $\mathrm{Re}(s) \geq \epsilon$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ absolut.
- Also ist $\zeta(s)$ holomorph auf dem Gebiet $\mathrm{Re}(s) > 1$.
- Die Ableitung der ζ-Funktion ist $\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n}{n^s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Aufgabe 12.2 (Holomorphie im Zusammenhang)
Für eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) *Definition*: f ist holomorph, d.h. überall komplex-differenzierbar.

(ii) *Cauchy-Bedingung*: Für jedes Dreieck Δ in Ω gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

(iii) *Lokale Integrabilität*: f besitzt lokal eine Stammfunktion.

(iv) *Cauchy-Integralformel*: Für jede Kreisscheibe $D = \mathbb{D}_r(z_0)$ in Ω gilt für alle $z \in D$

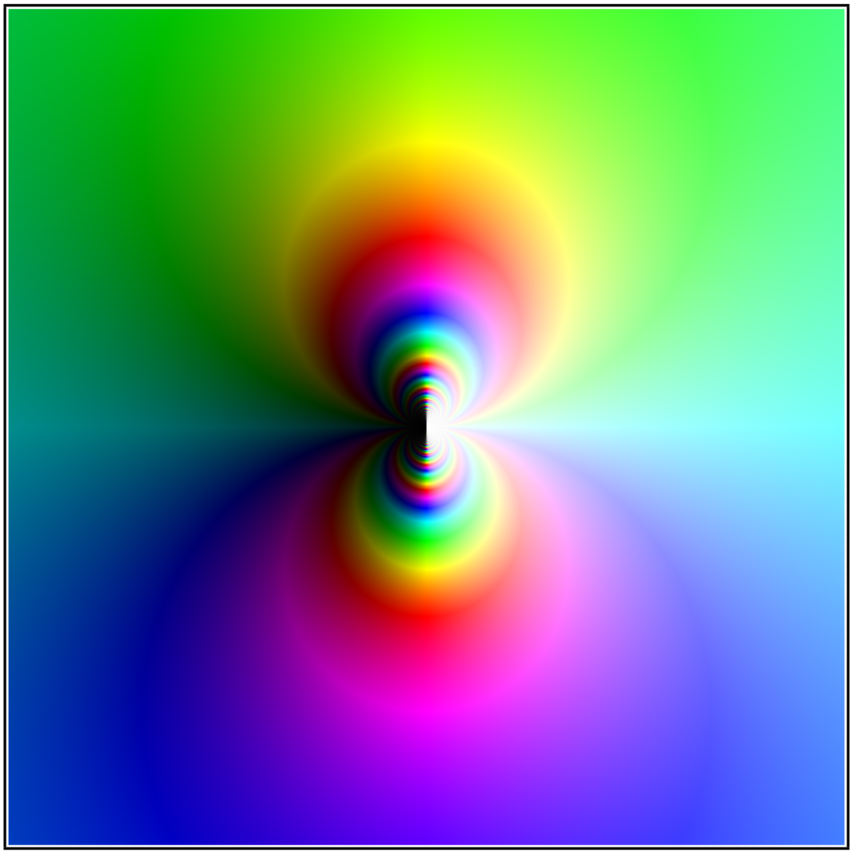
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

(v) f ist analytisch, d.h. überall durch eine Potenzreihe darstellbar.

Aufgabe 12.3 (Singularitäten I)
Es sei Ω ein Gebiet und $a \in \Omega$. Die Funktion f sei holomorph auf $\Omega - \{a\}$.

(1) Hat f an der Stelle a eine nicht-hebbare Singularität, dann hat $\exp(f(z))$ an der Stelle eine wesentliche Singulariät. Beispiel: $\exp(1/z^m)$, $m \geq 1$, hat an der Stelle $a = 0$ eine wesentliche Singularität.

(2) Für ein nicht-konstantes Polynom $P(z)$ hat die Funktion $P(f(z))$ an der Stelle a genau dann eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität), wenn $f(z)$ an der Stelle a eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität) hat.



Plot der Funktion $\exp(1/z)$. Sie hat im Nullpunkt eine wesentliche Singularität (Bildmitte). Der Farbton entspricht dem komplexen Argument des Funktionswertes, während die Helligkeit seinen Betrag darstellt. Hier sieht man, dass sich die wesentliche Singularität unterschiedlich verhält, je nachdem, wie man sich ihr nähert (im Gegensatz dazu wäre ein Pol gleichmäßig weiß). [Aus dem Wikipedia-Artikel 'Isolierte Singularitäten']

Aufgabe 12.4 (Singularitäten II)
Man bestimme die isolierten Singularitäten folgender Funktionen, inklusive der Polordnungen.

$$(1) \quad \frac{z^5}{(z^5+25)^2} \qquad (2) \quad \frac{z}{\exp(z)-z+1} \qquad (3) \quad \frac{z^2-\pi^2}{\sin(z)^2}$$

Aufgabe 12.5* (Winkelmessung bei $a=\infty$)
Es seien $\alpha, \beta\colon]-1,+1[\to \bar{\mathbb{C}}$ zwei stetige Kurven in der vervollständigten komplexen Ebene. Zunächst müssen wir klären, wann eine Kurve in $\bar{\mathbb{C}}$, die auch durch $a=\infty$ gehen könnte, differenzierbar heißen soll. Dazu benutzen wir die beiden Karten $\kappa_0\colon U_0 = \bar{\mathbb{C}} - \infty \longrightarrow \mathbb{C}$, $\kappa_0(z) = z$ und $\kappa_\infty\colon U_\infty = \bar{\mathbb{C}} - 0 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\kappa_\infty(z) = 1/z$ für $z \neq \infty$ und $\kappa_\infty(\infty) = 0$.

(A) Wir sagen, α sei an der Stelle t_0 *differenzierbar*, wenn die folgenden Aussagen gelten:

  (F_0) Die auf $\alpha^{-1}(U_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ definierte Kurve $t \mapsto \kappa_0(\alpha(t))$ ist bei t_0 differenzierbar, falls $\alpha(t_0) \in U_0$ ist.

  (F_∞) Die auf $\alpha^{-1}(U_\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ definierte Kurve $t \mapsto \kappa_\infty(\alpha(t))$ ist bei t_0 differenzierbar, falls $\alpha(t_0) \in U_\infty$ ist.

Man zeige: Dies ist wohldefiniert, d.h. wenn beide Fälle eintreten, erhalten wir in beiden Fällen die gleiche Antwort.

(B)* Können wir auch die Ableitung von α an einer Stelle t wohldefinieren ?

(C) Nun nehmen wir an, daß wir zwei Kurven α und β haben, daß $\alpha(t_1) = \beta(t_2) = \infty$ gilt und daß beide Kurven bei t_1 bzw. t_2 differenzierbar sind. Können wir nun den Schnittwinkel der beiden Kurven definieren ?

(D) Jetzt sei $f\colon \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Man zeige, daß f winkeltreu ist, also auch in einer Polstelle.