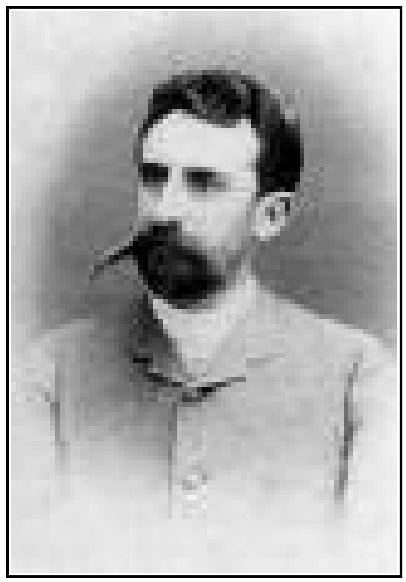
Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 11 **Abgabetermin : Montag, 24. Juni 2019**

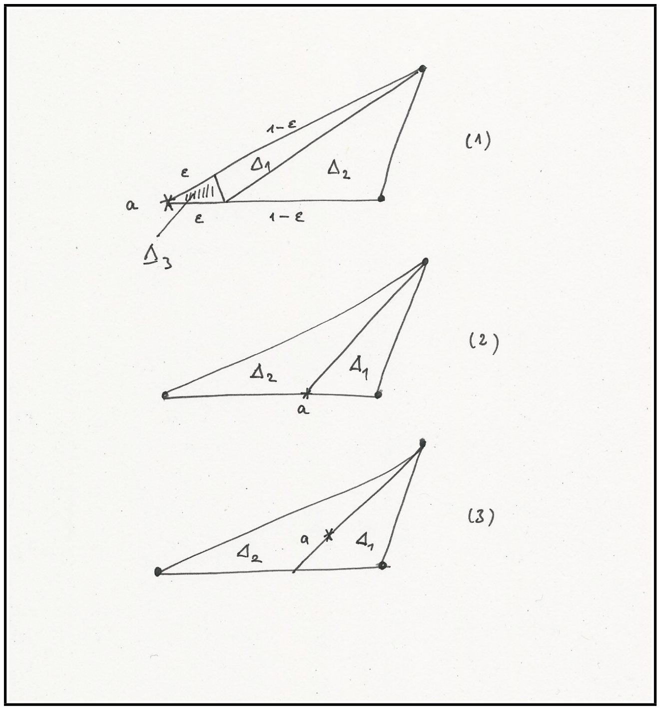


Giacinto Morera (1856 – 1909) bewies 1886 die Umkehrung des Lemmas von Goursat.

Aufgabe 11.1 (Verschärfte Fassung des Lemmas von Goursat)
Es sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und mit Ausnahme eines Punktes $a \in \Omega$ sogar holomorph. Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für jedes in Ω enthaltene Dreieck Δ.
(Hinweis: Man unterscheide die drei Fälle (siehe Skizze): (1) Der Ausnahmepunkt a ist eine Ecke von Δ. Man unterteile das Dreieck in drei Dreiecke, mit den angegebenen Teilungsverhältnissen für ein $0 < \epsilon < 1$; dann benutze man das ursprüngliche Lemma von Goursat für Δ_1 und Δ_2; für Δ_3 benutze man die Stetigkeit von f im Punkte a und die Standardabschätzung. (2) Der Ausnahmepunkt liegt auf einer Seite von Δ. Man benutze Fall (1) für Δ_1 und Δ_2. (3) Der Ausnahmepunkt a liegt im Inneren von Δ. Man benutze Fall (2) für Δ_1 und Δ_2.)



Skizze zum verschärften Lemma von Goursat.

Aufgabe 11.2 (Satz von Morera)
Es sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig auf einem Gebiet Ω. Verschwindet das Integral $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta$ längs des Randes eines jeden Dreiecks $\Delta \in \Omega$, dann ist f holomorph.
(Hinweis: Man nehme zunächst an, daß Ω z.B. eine Kreisscheibe ist. Dann folgere man die Aussage für allgemeinere Gebiete.)

Aufgabe 11.3 (Ganze Funktionen)
Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und z_0 ein beliebiger Punkt in $\mathbb{C}$. Dann gibt es also eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_o)^n$$

von f um z_0. Offenbar hängen die Koeffizienten a_n von z_0 ab. Und der Konvergenzradius ? — Man zeige: Für alle z_0 ist der Konvergenzradius unendlich.

Aufgabe 11.4 (Zueinander biholomorphe und nicht-biholomorphe Gebiete)

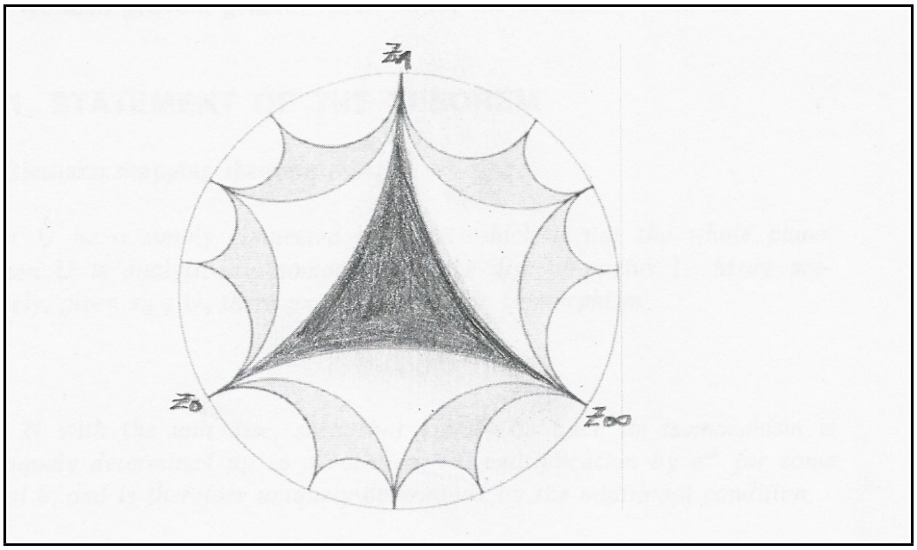
(1) Die Einheitsscheibe $\mathbb{E}$ und die obere Halbebene $\mathbb{H}$ sind zueinander biholomorph. (Also kann ein beschränktes und ein nicht beschränktes Gebiet durchaus zueinander biholomorph sein.)

(2) Kann $\mathbb{C}$ zu einem beschränkten Gebiet biholomorph sein ?

(3) Sind G und G' zueinander biholomorph und ist G Stammgebiet, so auch G'.

(4) Können $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C} - \{0\}$ zueinander biholomorph sein, $\mathbb{E}$ und $\mathbb{E} - \{0\}$, oder $\mathbb{H}$ und $\mathbb{H} - \{i\}$?

Aufgabe 11.5* (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $G \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Wir nennen $\Omega^+ := \mathbb{H}^+ \cap G$, $\Omega^- := \mathbb{H}^- \cap G$ und $\Omega^0 := \mathbb{H}^0 \cap \mathbb{R}$ den Schnitt mit der (offenen) oberen Halbebene, mit der (offenen) unteren Halbebene bzw. mit der reellen Achse. $\Omega := \Omega^+ \cup \Omega^0 \cup \Omega^-$ ist offenbar ein Gebiet.
Angenommen, wir haben eine stetige Funktion $f\colon \Omega^+ \cup \Omega^0 \to \mathbb{C}$, die auf Ω^+ holomorph ist und auf einem Stück



Pflasterung von der Einheitsscheibe $\mathbb{E}$ mit idealen hyperbolischen Dreiecken, durch iterierte Spiegelungen des Grunddreiecks G an den Seiten; aus dem S.Lang *Complex Analysis*.

des Randes (nämlich auf Ω^0) auch noch stetig ist. Weiter nehmen wir an, daß f auf Ω^0 reelle Werte annimmt. Wir möchten f auf ganz Ω fortsetzen, und zwar wie folgt durch die Spiegelbilder:

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \cup \Omega^0 \\ \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in \Omega^- \cup \Omega^0 \end{cases}$$

Man zeige: F ist auf Ω holomorph.

H. A. Schwarz hat dieses Spiegelungsprinzip angewandt, um holomorphe Funktionen zu konstruieren. Zunächst kann man sich leicht überlegen, daß man nicht nur mit der komplexen Konjugation an der reellen Achse spiegeln kann, sondern auch am Einheitskreis (oder an irgendeinem Kreis): Mutatis mutandis ist die Fortsetzung F dann gegeben durch:

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \cup \Omega^0 \\ \\ \overline{f(1/\overline{z})}, & z \in \Omega^- \cup \Omega^0 \end{cases}$$

Hier nun ein Beispiel.

- *Man betrachte den Einheitskreis $\mathbb{E}$ und drei Punkte z_0, z_1, z_∞ auf dem Rand. Man verbinde diese Punkte durch Kreisbögen C_0, C_1, C_∞, die den Einheitskreis senkrecht schneiden; dabei liege C_i gegenüber dem Punkt z_i. Die so umschriebene abgeschlossene Teilmenge G ist ein ideales hyperbolisches Dreieck.*

- *Wir spiegeln G an seinen drei Seiten und erhalten drei neue Dreiecke G_0, G_1, G_∞. Diese spiegeln wir wieder an zwei ihrer Seiten, und so fort. (Siehe Zeichnung aus dem Buch von S. Lang.) Mit diesen Spiegelbildern wird $\mathbb{E}$ ausgefüllt. Man beachte die 3-valente baumartige Struktur der Iteration.*

- *Wir nehmen jetzt eine bi-holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{H}$, welche auch auf dem Rand definiert und stetig ist und die drei Punkte z_0, z_1, z_∞ auf $0, 1, \infty$ abbildet und auf den drei Kreisbögen reell ist, sie also in die Intervalle $[0,1], [1,\infty], [\infty,0]$ abbildte. (Gibt es eine solche Funktion ? - Nein, es kann keine Möbius-Transformation sein. In der Tat ist es nicht einfach, eine solche Funktion zu konstruieren; die Existenz folgt aus dem Riemannschen Abbildungssatz, eine konkrete Funktion findet man mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion.)*

- *Durch Anwendung des Spiegelnungsprinzips werden die drei Dreiecke* G_0, G_1, G_∞ *der ersten Generation auf die untere Halbebene abgebildet, die sechs der zweiten Generation auf die obere Halbebene, und so fort. Am Ende haben wir eine Funktion* $F\colon \mathbb{E} \to B := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$*, die surjektiv ist und jeden Wert unendlich oft annimmt.*
- *Da die Ableitung von* F *nirgendwo verschwindet, ist* F *um jeden Wert herum lokal umkehrbar. Anders gesagt:* F *ist eine unendlich-blättrige Überlagerung von* B*.*
- *Da* $\mathbb{E}$ *einfach-zusammenhängend ist, ist es die universelle Überlagerung.*
- *Wie ist der Zusammenhang zwischen dem oben erwähnten 3-valenten Baum und der Fundamentalgruppe von* B*, die eine freie Gruppe vom Rang* 2 *ist ?*

Allgemeine Überlegungen und Erläuterungen zum Spiegelungsprinzip, z.B. an eine Ellipse, findet man in dem Buch T. Needham: *Visual Complex Geometry* auf den Seiten 254 – 257.