Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 10 **Abgabetermin : Montag, 17. Juni 2019**

Edouard Goursat (1858 – 1936) schrieb mehrere einflußreiche Lehrbücher.

Aufgabe 10.1 (Logarithmus und Wurzeln von Funktionen)
Es sei $f\colon S \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Stammgebiet; es sei $f(z) \neq 0$ für alle $z \in S$.

(a) Man zeige: Es gibt eine holomorphe Funktion g auf S mit $f(z) = \exp(g(z))$ für alle $z \in S$.

(b) Man zeige: Es gibt für jedes $n \geq 0$ eine holomorphe Funktion h auf S mit $f(z) = h(z)^n$ für alle $z \in S$.

Aufgabe 10.2 (Satz von Gauß-Lucas)
Wenn wir die Nullstellen $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ eines Polynoms $P(z) = \prod_{i=1}^{n}(z-\zeta_i)$ kennen, wo liegen die kritischen Stellen, also die Nullstellen der Ableitung $P'(z)$? — Für ein Quadratisches Polynom ist $\zeta' = (\zeta_1 + \zeta_2)/2$ offensichtlich die eine Nullstelle von $P'(z)$. — Für ein Polynom dritten Grades besagt ein Satz von J. Siebeck[1], daß die beiden Brennpunkte der Steiner'schen Inellipse des Dreiecks der Nullstellen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ die beiden Nullstellen der Ableitung sind.
Für den allgemeinen Fall $n \geq 1$ gilt der **Satz von Gauß-Lucas**: *Die Nullstellen von P' liegen in der konvexen Hülle der Nullstellen von P.*
Hinweis: Man betrachte die Partialbruchzerlegung der logarithmischen Ableitung

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-\zeta_1} + \cdots + \frac{1}{z-\zeta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{z-\zeta_i}}{|z-\zeta_i|^2}$$

[1] Jörg Siebeck: Über eine neue analytische Behandlungweise der Brennpunkte. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), Bd. 64 (1864), S. 175–182; das Ergebnis wird in vielen Büchern Morris Marden (1945) zugeschrieben.

und finde damit für jede Nullstelle ζ' von P' reelle Zahlen $0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 1$ mit $\sum \lambda_i = 1$ und $\zeta' = \lambda_1\zeta_1 + \ldots \lambda_n\zeta_n$. (Die λ_i heißen baryzentrische Koordinaten.)

> *Würde auch das Integral* $\int_{\partial B} (\zeta - c)^{-1}\, d\zeta$ *verschwinden, so gäbe es keine Funktionentheorie!*

Aus R. Remmert: *Funktionentheorie I*, S. 136. — Wie gut, daß dieses Integral nicht verschwindet!

Aufgabe 10.3 (Mittelwertgleichung)
Es sei f holomorph in dem Gebiet Ω, sei $z_0 \in \Omega$ und die abgesclossene Kreisscheibe $\mathbb{D}_\rho(z_0)$ liege ganz in Ω.
(a) Man zeige

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\phi})\, d\phi \qquad \text{für} \;\; r < \rho.$$

(b) Man folgere:

$$|\, f(z_0)| \leq \max\{|f(\zeta)| \mid |\zeta - z_0| \; = r\} \qquad \text{für} \;\; r < \rho.$$

Aufgabe 10.4 (Intergrale logarithmischer Ableitungen)
Die logarithmische Ableitung $\frac{f'(z)}{f(z)}$ kann man i.A. nur auf Elementargebieten integrieren. Wenn man das Integral aber exponentiert, so gilt:
(1) Ist f holomorph und ohne Nullstellen auf einem Gebiet Ω, so gilt für jeden Integrationsweg γ in Ω mit Anfangspunkt a und Endpunkt b die Gleichung

$$f(b) = f(a)\, \exp\left(\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta\right).$$

(2) Man folgere daraus für einen geschlossenen Weg γ, daß

$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta \in 2\pi i\, \mathbb{Z}\, .$$

(Man benutze dies in Aufgabe 10.5(1).)

Aufgabe 10.5* (Umlaufzahl und Homologie)
Es sei eine geschlossene Integrationskurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben; wir bezeichnen wir ihr Bild mit $\Gamma = \gamma([0,1])$. Ist $P \in \mathbb{C} - \Gamma$, so definieren wir die *Umlaufzahl* von γ um P durch

$$\mathrm{Um}(\gamma; P) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - P}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - P}\, dt\, .$$

Man zeige:

(1) $\mathrm{Um}(\gamma; P)$ ist eine ganze Zahl. (Vgl. Aufgabe 10.4 (2).)

(2) $\mathrm{Um}(\gamma; P) = 0$ für einen konstanten Weg.

(3) $\mathrm{Um}(\gamma_1 * \gamma_2; P) = \mathrm{Um}(\gamma_1; P) + \mathrm{Um}(\gamma_2; P)$ für zwei Wege in mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$.

(4) $\mathrm{Um}(\gamma^{-1}; P) = -\mathrm{Um}(\gamma; P)$ für den umgekehrten Weg.

(5) Bei festem γ ist $P \mapsto \mathrm{Um}(\gamma; P)$ eine lokal-konstante Funktion auf $\mathbb{C} - \Gamma$.

(6) Sind γ_1 und γ_2 bei festem P homotop in $\mathbb{C} - P$, so gilt $\mathrm{Um}(\gamma_1; P) = \mathrm{Um}(\gamma_2; P)$. Hierbei müssen die Anfangs/Endpunkte $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ und $\gamma_2(0) = \gamma_2(1)$ nicht gleich sein.

(7) Sei γ und P fest und $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $|\alpha(t) - \gamma(t)| < |\gamma(t) - P|$ für alle t, so gilt $\mathrm{Um}(\gamma; P) = \mathrm{Um}(\alpha; P)$.

Was ist unter dem von γ umschlossene Gebiet zu verstehen ? Für einfach-geschlossenes Kurven ist das vielleicht klar. Hier ist eine Definition: Wir nennen

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{Q \in \mathbb{C} - \Gamma \mid \mathrm{Um}(\gamma; Q) \neq 0\} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Ext}(\gamma) := \{Q \in \mathbb{C} - \Gamma \mid \mathrm{Um}(\gamma; Q) = 0\}$$

das *Innere* bzw. das *Äußere* der Kurve γ.[2] Man zeige:

(8) $\mathbb{C} = \mathrm{Int}(\gamma) \cup \Gamma \cup \mathrm{Ext}(\gamma)$.

(9) $\mathrm{Int}(\gamma)$ ist offen und beschränkt; $\mathrm{Ext}(\gamma)$ ist offen, nicht-leer und unbeschränkt.

Man leite folgende Verallgemeinerung der Cauchy'schen Integralformel her:

(10) Für eine holomorphe Funktion f auf Ω und γ in Ω gilt

$$\mathrm{Um}(\gamma; P)\, f(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - P}\, d\zeta$$

[2] Man kann damit z.B. das Integral $\int_\gamma \overline{z} dz$ als $2i$-fache des Flächeninhalts von $\mathrm{Int}(\gamma)$ interpretieren; vgl. Aufgabe 9.4.