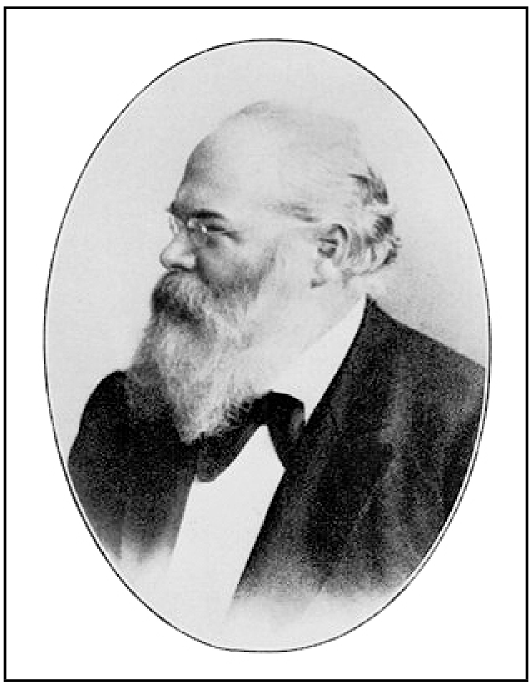
Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 9 **Abgabetermin : Montag, 3. Juni 2019**

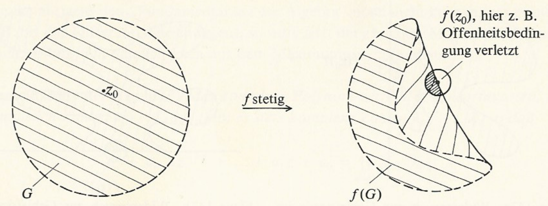


Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921) ist einer der Hauptakteure der Funktionentheorie, man denke an die Schwarz'sche Ungleichung, das Schwarz'sche Lemma, das Schwarz'sche Spiegelungsprinzip, die Schwarz'sche Ableitung, das alternierende Verfahren, ... usw..

Aufgabe 9.1 (Normalform in geeigneten Koordinaten)
Es sei f in einer Umgebung von z_0 analytsisch und nicht konstant; es sei $w_0 = f(z_0)$. Es sei g eine Potenzreihe um 0 mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Wir sagen, f habe um z_0 *in geeigneten Koordinaten die Form* g, wenn es Umgebungen U und U' von z_0 bzw. von w_0 und zwei Potenzreihen κ und κ' gibt, welche um 0 die Konvergenzradien $r > 0$ bzw. $r' > 0$ haben und bi-analytische Abbildungen $\kappa\colon \mathbb{D}_r(0) \to U$ bzw. $\kappa'\colon \mathbb{D}_r(0) \to U'$ sind, wenn ferner $f(U) \subset U'$ ist und

$$f(\kappa(z)) = \kappa'(g(z)) \quad \text{für alle } |z| < \rho \text{ gilt sowie } \quad \kappa(0) = z_0 \quad \text{und} \quad \kappa'(0) = w_0.$$

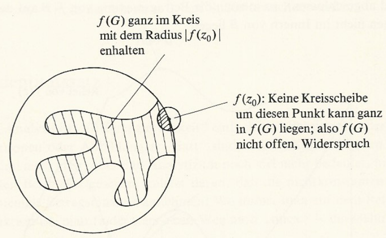
Man zeige: Hat f an der Stelle z_0 die Ordnung m (d.h. $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$), so hat f in geeigneten Koordinaten die Form z^m. (Hinweis: In der Vorlesung haben wir den Fall $m = 1$ gezeigt; und in einem Beweis wurde der Fall $m > 1$ vorbereitet.)



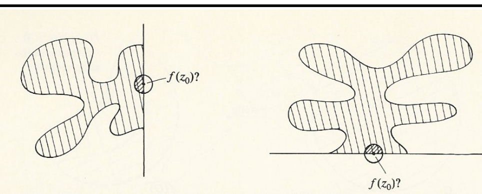
Figur 145. Beispiel einer nichtkonstanten stetigen Abbildung f mit nichtoffenem $f(G)$

Diese und die folgenden Abbildungen sind aus K. Jänich: *Analysis für Physiker und Ingenieure* (1983).

Aufgabe 9.2 (Gebietstreue)
Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf dem Gebiet Ω, so ist $f(\Omega)$ wieder ein Gebiet.



Figur 146. Widerspruch zur Gebietstreue im Falle eines Betragsmaximums bei z_0 □

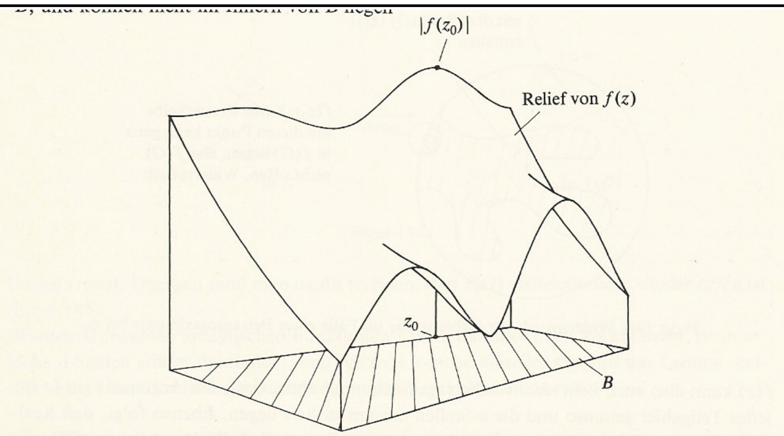


Figur 147a. Widerspruch zur Gebietstreue im Falle eines Realteilmaximums bei z_0

Figur 147b. Widerspruch zur Gebietstreue im Falle eines Imaginärteilminimums bei z_0

Aufgabe 9.3 (Wegintegrale I)
Man berechne explizit die folgenden Wegintegrale.

- $\displaystyle\int_\gamma z^m \exp(z^{m+1})\,dz$ für den Weg $\gamma(t) = r\exp(it)$ mit $0 \le t \le 2\pi$, längs des Kreises um 0 mit Radius $r > 0$.
- $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ für den Rand eines Quadrats mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge $\ell > 0$.
- $\displaystyle\int_\gamma z\cos(z)\,dz$ für die Ellipse $\gamma(t) = a\exp(it) + b\exp(-it)$ mit $0 \le t \le 2\pi$ und Halbachsen $a > b > 0$.
- $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)}\,dz$ für die drei Wege $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}\exp(it)$, $\gamma(t) = \frac{1}{2}\exp(it)$ und $\gamma(t) = \frac{1}{2} + \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$.



Figur 149. Auf einer kompakten Menge B (hier ein abgeschlossenes Rechteck) muß auch eine nichtkonstante analytische Funktion (wie jede stetige) ein Betragsmaximum annehmen. Nach dem Maximumprinzip muß es auf dem Rande liegen

---

Aufgabe 9.4 (Wegintegrale II)
Es sei $P(z)$ ein komplexes Polynom, $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, und $r > 0$. Man zeige:

$$\int_\gamma P(z)\,dz = 0\,, \qquad \text{aber} \qquad \int_\gamma \overline{P(z)}\,dz = 2\pi i\, r^2\, \overline{P'(z_0)}\,,$$

wobei $\gamma(t) = z_0 + r\exp(it)$ und $0 \le t \le 2\pi$ ist.

Aufgabe 9.5* (Schwarz'sches Lemma und die Automorphismen der Einheitsscheibe)
Es sei $\mathbb{E} = \mathbb{D}_1(0)$ die Einheitsscheibe und $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine analytische Funktion.

(1) Ist $f(0) = 0$, dann gilt:

$$(1.1) \quad |f(z)| \le |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{E} \qquad \text{und} \qquad (1.2) \quad |f'(0)| \le 1.$$

(Hinweis: Man benutze das Maximumprinzip für den Betrag der Funktion $f(z)/z$.)

(2) Gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ auch nur für ein einziges $z_0 \in \mathbb{E}$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung, d.h. $f(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

(3) Daraus folgt: die Gruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{E}, 0)$ der analytischen Selbstabbildungen $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit Fixpunkt 0 ist isomorph zur Gruppe $\mathbb{S}^1$ aller Drehungen.

(4) Für jedes $c \in \mathbb{E}$ sei $\Psi_c(z) := \dfrac{z - c}{\bar{c}z - 1}$. Es gilt $\Psi_c(0) = c$, $\Psi_c(c) = 0$ und $\Psi_c \circ \Psi_c = \mathrm{id}$, sowie $\Psi_0 = -\,\mathrm{id}$.

(5) Daraus folgt: die Gruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{E})$ der analytischen Selbstabbildungen $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ist die Gruppe aller Möbius-Transformationen zu den Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

(6) Die Cayley-Abbildung $C\colon \mathbb{H} \to \mathbb{E}$, $C(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ ist biholomorph.

(7) Die Abbildung $f \mapsto C^{-1} \circ f \circ C$ ist ein Isomorphismus $\operatorname{Aut}(\mathbb{E}) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$.