Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 8 **Abgabetermin: Montag, 27. Mai 2019**

Ich liebe Musik, weil sie mich isoliert. Ich höre die ersten drei Takte, aber schon vom vierten an höre ich nichts mehr. Ich überlasse mich meinen Gedanken, nichts unterbricht mich mehr. Und auf diese Weise habe ich schon mehr als ein Problem gelöst. — Dieses Eingeständnis mangelnden Respekts gegenüber einer so schönen Kunst wie der Musik machte einer der großen italienisch-französischen Mathematiker des 18. Jahrhunderts, Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), gegenüber seinem Kollegen Delambre.

Aufgabe 8.1 (Umrechnen von Potenzreihen)
Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < r \leq \infty$. Wir wollen $f(z)$ umrechnen für einen Entwicklungspunkt ζ mit $|\zeta| < r$ in die neue Potenzreihe $f(z-\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

(1) Man tue dies zunächst einmal ganz naiv und stelle fest:

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k}{k} a_{n+k}\, \zeta^k \,.$$

(2) Nun nehmen wir einen formalen Standpunkt ein und benutzen die *formale Ableitung* einer Potenzreihe, also $Df(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$. Wir schreiben $f^{(n)} = (D \circ D \circ \ldots \circ D)f$ für die n-fache formale Ableitung. Man beweise zunächst, daß Df den gleichen Konvergenzradius r hat wie f.

(3) Damit können wir unser obiges ζ in alle $f^{(n)}$ einsetzen und erhalten:

$$b_n = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(-\zeta)\,.$$

(4) Beispiel: $f(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$. Man berechne den Konvergenzradius. Dann bestimme man die formalen Ableitungen $f^{(k)}(z)$. Mit diesen rechne man die Potenzreihe f um für die Entwicklungspunkte $z_1 = 1/2$ und $z_2 = -1/2$ in Potenzreihen f_1 bzw. f_2. Und nun berechne man die neuen Konvergenzradien. (Man wird feststellen: der Konvergenzradius der Reihe f_1 ist nun so groß, daß er den Punkt $z_3 = 1$ umfaßt, der für das alte f auf dem Rand der Konvergenzscheibe lag; also könnte man nun f_1 für den Entwicklungspunkt z_3 umrechnen. — Man könnte dieses Verfahren, das man *analytische Fortsetzung* nennt, vielleicht immer weiter treiben ?)

Aufgabe 8.2 (Umkehrung von Potenzreihen und Formel von Lagrange)
Es seien $f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$ und $g(T) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j$ zwei formale Potenzreihen über einem Körper $\mathbb{K}$. Natürlich kann man g in f einsetzen, also das Kompositionsprodukt $f(g(T)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n$ bilden, wenn f ein Polynom ist. Wir wollen hier zeigen, daß dies auch geht, wenn f eine beliebige Potenzreihe ist, vorausgesetzt der absolute Term von g ist $g(0) = b_0 = 0$.

(1) Sei $g(T)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{k,n}\, T^n$ die k-te Potenz von $g(T)$; dann ist

$$\beta_{k,n} = \sum_{j_1+j_2+j_3+\ldots+j_k=n} b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_k} \ ,$$

wobei die Summe über alle geordneten Partitionen von n der Länge k läuft.

(2) Die Koeffizienten c_n der Komposition $f(g(T))$ sind dann $c_n = a_n \sum_{k=1}^{n} \beta_{k,n}$.

(3) Nun sei $f(T) = \sum a_i T^i$ wie oben gegeben; gesucht ist die Umkehrung von $f(T)$, also eine Potenzreihe $g(T) = \sum b_j T^j$ mit $b_0 = 0$, so daß $f(g(T)) = T$ gilt. Unter welchen Voraussetzungen existiert g und wie kann man seine Koeffizienten bestimmen ?
(Hinweis: Man zeige, daß nach (2) der Koeffizient c_n die Form $c_n = a_1 b_n +$ 'kleinere Terme' hat; also kann man das unendliche Gleichungssystem $c_n = 0$ für $n \neq 1$ und $c_1 = 1$ unter gewissen Voraussetzungen an die a_i immer rekursiv nach den b_j auflösen.)

(4) Man kann offenbar auch f in g einsetzen und es gilt auch $g(f(T)) = T$.

Bemerkung: Nach Lagrange ist die folgende Inversionsformel benannt, welche die Koeffizienten $b_n = \operatorname{koeff}_n(g(z))$ der Umkehrung g von f direkt ausdrückt. Es ist

$$\operatorname{koeff}_n(g(z)) = \frac{1}{n} \operatorname{koeff}_{n-1}\left(\frac{z^n}{f(z)^n}\right).$$

Aufgabe 8.3 (Bernoulli-Zahlen und ihre erzeugende Funktion)
Weil die Potenzreihe für $e^z - 1$ durch z teilbar ist und der erste Koeffizient des Quotienten nicht-verschwindet, ist $(e^z - 1)/z$ invertierbar. Wir können also ansetzen:

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Die dadurch eindeutig definierten Zahlen heißen *Bernoulli-Zahlen*[1] und man nennt f eine *erzeugende Funktion* für die Folge $B_0, B_1, B_2, \ldots$, hier genauer eine *exponentielle erzeugende Funktion*, weil man noch durch $n!$ dividiert hat.

- Man zeige $B_0 = 1$ und $B_1 = 1$. Und $B_n = 0$ für ungerades $n > 1$.
- Man zeige

$$\frac{z}{2}\,\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e - z/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

- Ersetzt man z durch $2\pi i z$, so erhält man

$$\pi z \cot(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}.$$

Jakob I Bernoulli (1665 - 1705), nur einer von mehreren Mathematikern aus der Basler Familie Bernoulli.

Aufgabe 8.4 (Potenzreihen und Differentialgleichungen)
Es sei

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+k}\, n!\,(n+k)!}\, z^{2n+k}.$$

Man zeige, daß f_k die Differentialgleichung $z^2 {f_k}''(z) + z{f_k}'(z) + (z^2 - k^2) f_k(z) = 0$ erfüllt.
(Hinweis: Man probiere zuerst den Fall $k = 0$.)

Aufgabe 8.5* (Komplexe Differentialgleichungen)
(A) Es seien $a_0(z), a_1(z), \ldots, a_n(z)$ in einer gemeinsamen Umgebung von 0 analytische Funktionen; wir nehmen $a_0(0) \neq 0$ an. Ferner seien $c_0, c_1, \ldots c_n$ beliebige komplexe Zahlen. Dann gibt es genau eine an der Stelle 0 analytische Funktion f, für die gilt:

$$f^{(k)}(0) = c_k \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

und

$$a_0(z) f^{(n)}(z) + a_1(z) f^{(n-1)}(z) + \ldots + a_{n-1}(z) f^{(1)}(z) + a_n(z) f(z) = 0 \quad \text{in einer Umgebung von 0.}$$

(Hinweis: Warum kann man $a_0(z) = 1$ annehmen ? Man behandle alle Funktionen als formale Potenzreihen; für das dann gewonnene formale f weise man dann einen positiven Konvergenzradius nach.)

(B) Es sei $g(z)$ eine an der Stelle 0 analytische Funktion. Dann gibt es genau eine an der Stelle 0 analytische Funktion $f(z)$ mit

$$f(0) = 0 \text{ und } f'(z) = g(f(z)) \quad \text{in einer Umgebung von 0.}$$

(Hinweis: Man behandle wieder alles formal und zeige erst am Ende Konvergenz.)

[1] nach Jakob I Bernoulli benannt.