Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 7 **Abgabetermin : Montag, 20. Mai 2019**

Augustin-Louis Cauchy (1789 -1857) und Bernhard Riemann (1826 -1866), die beiden Begründer der Funktionentheorie.

Aufgabe 7.1 (Harmonisch-konjugierte Funktionen)
Zwei $u, v \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ heißen *zueinander harmonisch-konjugiert*, wenn sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ .$$

Wir schreiben $u \sim_h v$ und beweisen ganz leicht und schnell:

(1) Sei $u \sim_h v$. In diesem Fall ist u genau dann harmonisch, wenn v harmonisch ist.

(2) $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist genau dann holomorph, wenn $u \sim_h v$ gilt.

(3) Aus $u \sim_h v$ folgt $u + A \sim_h v + B$ für beliebiges $A, B \in \mathbb{R}$.

Nun sei eine harmonische Funktion $u \colon G \to \mathbb{R}$ auf einem Gebiet G gegeben. Gesucht ist ein harmonisch-konjugiertes v, so daß also $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion ist. Aber wir wollen sie ohne Integration der partiellen Ableitungen von u finden, wie wir das in Aufgabe 6.3 getan haben.

(4) Es sei $u(x,y) = \sum_{i,j}^{n} a_{i,j}\, x^i y^j$ ein reelles Polynom in zwei Variablen x und y. Unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten ist u harmonisch ?

(5) Offensichtlich kann man in dieses u für x und y auch komplexe Werte einsetzen. Man zeige, daß die Funktion
$$f(z) = 2\,u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - u(0,0)$$
holomorph ist und den Realteil u hat.

(6)* Kann man auch in $u(x,y) = e^x \sin y$ oder $u(x,y) = \arctan \frac{y-b}{x-a}$ für x und y komplexe Werte einsetzen und ist dann $f(z) = 2\,u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - u(0,0)$ holomorph ?

Aufgabe 7.2 (Allgemeine Potenzen)
Sobald man die Exponentialfunktion und den Logarithmus zur Verfügung hat, kann man allgemeine Potenzen z^a definieren; man macht das genau wie damals im Reellen. Es sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig und $z \in \bar{\mathbb{C}}$ in der links-geschlitzte Ebene und wir definieren
$$P_a : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad P_a(z) := \exp(a \log(z)).$$
Offenbar ist $P_a(z)$ reell, wenn a und z reell sind. Und $P_n(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$, insbesondere ist $P_1(z) = z$ Ebenso sehen wir $P_a(e) = \exp(a)$ für die Eulersche Konstante e, wodurch nun unsere Kurznotation $e^{i\theta}$ für $P_{i\theta}(e) = \exp(i\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$ nun endlich gerechfertigt ist.
Man zeige die folgenden Aussagen (wobei in jedem Fall stillschweigend vorauszusetzen ist, daß das Argument ζ eines Formelbestandteils $P_a(\zeta)$ in der geschlitzten Ebene $\bar{\mathbb{C}}$ liegen muß).

- $P_a(z)\, P_b(z) = P_{a+b}(z)$ und $P_0(z) = 1$.
- $P_a(zw) = P_a(z)\, P_a(w)$ und $P_a(1) = 1$.
- $P_{ab}(z) = P_a(P_b(z))$.
- $P_{-a}(z) = 1/P_a(z)$ und $P_a(1/z) = 1/P_a(z)$.
- $P_{n/m}(z) = \sqrt[m]{z}^{\,n}$ für eine rationale Zahl n/m, wobei wir bei der Wahl der Wurzel vorsichtig sind.
- $P_{s+it}(z) = z^s\, P_i(z)^t$ für $s,t \in \mathbb{R}$. — Beispiel: $P_i(i) = i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Bemerkung. Daß i^i reell ist, erwähnt EULER am Schluß eines Briefes an GOLDBACH vom 14. Juni 1746: „Letztens habe gefunden, daß diese expressio $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ einen valorem realem habe, welcher in fractionibus decimalibus $= 0{,}2078795763$, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet" (vgl. S. 383 der in 1.3 zitierten Correspondance entre Leonhard EULER et Chr. GOLDBACH). □

Aus R. Remmert: *Funktionentheorie*, Bd. 1 (1992^2).

- $\overline{P_a(z)} = P_{\overline{a}}(\overline{z})$.
- Schreibt man $z = r\,e^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten und $a = s + i\,t$ in kartesischen Koordinaten, so ist berechne man $P_a(z)$ durch reelle Potenzen P_i für reelle Argumente. Daraus leite man die Gleichung $|P_a(z)| = |z|^{\mathrm{Re}(a)}\, e^{-\varphi \mathrm{Im}(a)} = r^s/e^{\varphi t}$ her und daraus die Abschätzung $|z^a| \le |z|^s\, e^{\pi t}$.
- $P_a(z)$ ist holomorph (als Funktion von z) und $P_a{}'(z) = a\,P_{a-1}(z)$.
- $P_a(z)$ ist auch holomorph als Funktion von a und es gilt: $\frac{\partial}{\partial a} P_a(z) = \log(z)\, P_a(z)$. Und insbesondere ist also $\frac{\partial}{\partial a} P_a(e) = P_a(e)$.

Aufgabe 7.3 (Verschobene Wurzeln und andere Umkehrungen)
(a) Man bestimme eine Funktion $f\colon \Omega = \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z)^2 = z^2 - 1$ und $f(0) = i$.
(Hinweis: Man probiere $i\, P_a(1+z)P_b(1-z)$ für geschickt gewähltes a und b.)

(b) Wir erinnern uns, daß die Joukowski-Funktion $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ die obere Halbebene $\mathbb{H}$ biholomorph auf Ω abbildet. Wir suchen die Umkehrfunktion g, von der wir wissen, daß sie Funktionalgleichung $(g(z)-z)^2 = z^2 - 1$ erfüllt.

(c) Der Cosinus $\cos(z) = w$ bildet den Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ biholomorph auf Ω ab. Die Umkehrfunktion $\arccos : \Omega \to S$ ist natürlich der Arcuscosinus, den wir als $\arccos(w) = -i \log(w + \sqrt{w^2 - 1})$ schreiben können, wenn wir die Funktion f aus (a) benutzen.

Aufgabe 7.4 (Charakterisierung der Exponentialfunktion durch eine Differentialgleichung)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Man beweise: Genügt f für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ der Differentialgleichung

$$f'(z) = c\, f(z),$$

so ist $f(z) = A \exp(cz)$ mit dem Anfangswert $A = f(0)$.

Mit dem gleichen Trick beweise man folgende nützliche Aussage: Genügt die stetige Funktion $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ der Funktionalgleichung

$$\chi(s+t) = \chi(s) \cdot \chi(t),$$

so ist $\chi(t) = \alpha \exp(i\beta t)$ mit Anfangswert $\alpha = \chi(0)$.
(Hinweis: Man kann aus der Stetigkeit und der Homomorphie schon folgern, daß χ sogar differenzierbar ist, was wir hier stillschweigend annehmen wollen. Dann ist $\beta = \alpha\chi'(0)$. — Ein solches χ nennt man einen *komplexen Charakter* der additiven Gruppe $\mathbb{R}$.)

Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827). Er war Physiker und Astronom und schrieb ein bedeutendes Buch über Himmelsmechanik. Von ihm ist die folgende Anekdote überliefert:

Comme le citoyen Laplace présentait au général Bonaparte la première édition de son Exposition du Système du Monde*, le général lui dit: ‚Newton a parlé de Dieu dans son livre. J'ai déjà parcouru le vôtre et je n'y ai pas trouvé ce nom une seule fois.' À quoi Laplace aurait répondu: ‚Citoyen premier Consul, je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse.'*

[*Als der Bürger Laplace dem General Bonaparte die erste Ausgabe seiner* Exposition du Système du Monde *zeigte, sagte der General zu ihm: 'Newton sprach in seinem Buch von Gott. Ich habe das Ihrige schon durchgesehen und dabei diesen Begriff kein einziges Mal gefunden.' Woraufhin Laplace erwidert hatte: 'Bürger und Erster Konsul, ich habe dieser Hypothese nicht bedurft'.*]

Aufgabe 7.5* (Laplace-Operator)
Es seien (r, φ) die periodischen Polarkoordinaten für die punktierte Ebene $\mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C} - (0,0)$, genauer sei $P : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^\bullet$ gegeben durch $P(r,\varphi) = (x,y)$ mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$. Eine auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^\bullet$ definierte Funktion $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei 2-mal stetig partiell differenzierbar. Wir setzen $U := u \circ P$, also $U(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

(1) Man schreibe den Laplace-Operator

$$\Delta(u) = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten um:

$$\Delta(U) = U_{rr} + \frac{1}{r}\, U_r + \frac{1}{r^2}\, U_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

(2) Man wende diese Formel auf $u(x,y) = a\log|z-\zeta| = a\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ an und zeige, daß u harmonisch ist; hier ist $a \in \mathbb{R}$ und $\zeta = (\xi,\eta) \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: *Dieses u ist die Potentialfunktion*[1] *einer elektrischen Punktladung an der Selle ζ mit Ladungsstärke a. Für mehrere Punktladungen an den Stellen $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ mit Ladungsstärken a_k ist die Potentialfunktion $u(z) = a_1\log|z-\zeta_1| + \ \ldots + a_n\log|z-\zeta_n| = \log\prod_k |z-\zeta_k|^{a_k} = \mathrm{Re}(\,\log\prod_k (z-\zeta_k)^{a_k})$.*

(3) Man beweise die Kettenregel

$$\Delta(u \circ f) = (\Delta(u) \circ f)\,|f'|^2$$

für holomorphes f.

(4) Man zeige, daß für ein harmonisches u auch $u(x/r^2, y/r^2)$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ harmonisch ist.
(Funktioniert das auch für andere Potenzen als r^2 im Nenner der Argumente ?)

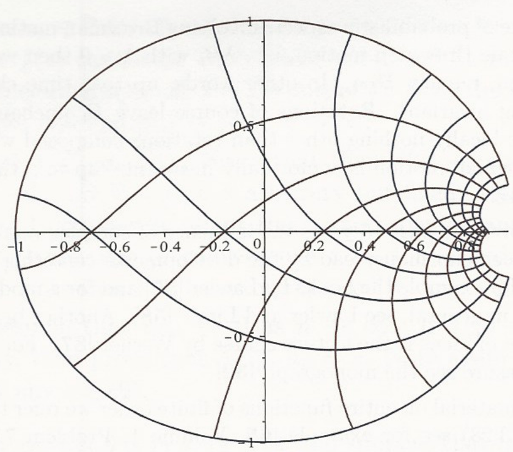

Figure 3.8. The function $w = \frac{z^2-i}{z^2+i}$, $0 \le \mathrm{Re}\, z \le 3$, $0 \le \mathrm{Im}\, z \le 3$

Aus W. Schlag: *A Course in Complex Analysis and Riemann Surfaces* (2014).

[1]Synonym zu harmonisch.