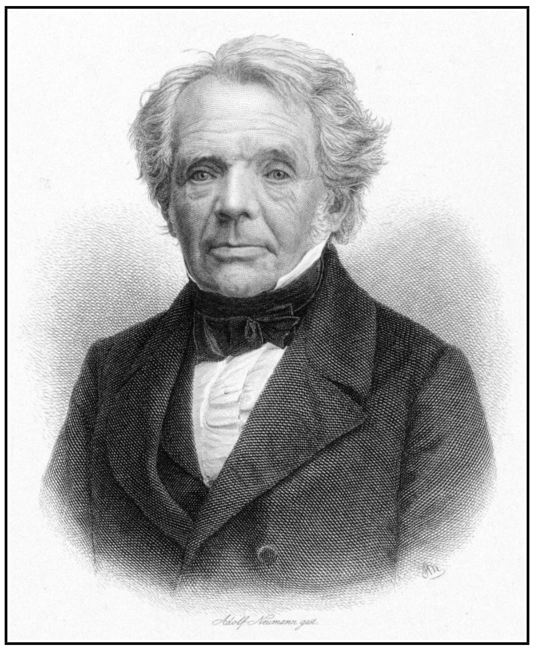
Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 6 **Abgabetermin : Montag, 13. Mai 2019**



August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), nicht nur wegen der Möbius-Transformationen bekannt.

Aufgabe 6.1 (Komplexe Differenzierbarkeit)
Wir schreiben $z = x + iy$ und wollen wissen, wo die folgenden Funktionen komplex-differnzierbar sind:
1) $f(z) = xy + i\,xy$
2) $f(z) = y^2 \sin x + i\,y$
3) $f(z) = \sin(x + y) + i \cos(x + 2y)$

Aufgabe 6.2 (Holomorphe Funktionen mit 'dünnem' Wertebereich sind konstant.)
Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f = u + iv \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Man zeige, daß f konstant ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
a) f nimmt nur reelle Werte an.
b) f nimmt nur imaginäre Werte an.
c) f nimmt nur Werte auf dem Einheitskreis an.
d) f nimmt nur Werte auf einer Geraden an.
e)* $u = \varphi \circ v$ für eine differenzierbare Funktion $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.3 (Zu ergänzender Imaginärteil)
Gegeben sei eine Funktion $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Gesucht sind alle Funktionen $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so daß $f(z) := u(x+iy)+iv(x+iy)$ holomorph ist.

a) $u(x+iy) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$

b) $u(x+iy) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{y}\cos x$

Aufgabe 6.4 (Eindeutigkeit der Imaginärteile bis auf Konstante)
Es sei $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ holomorph in einem Gebiet G.
Man beweise: Ist $f(x+iy) = u(x,y) + i\,\tilde{v}(x,y)$ ebenfalls holomorph, so muß $v - \tilde{v}$ konstant sein.

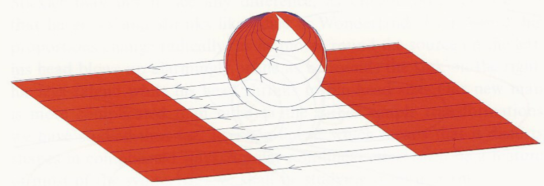


Figure 3.5. A translation lifted to the sphere. The blue lines are the trajectories of translations in the negative x-direction in the plane and the blue circles are the same trajectories on the sphere after lifting by stereographic projection. Translation carries the right red region to the white strip, which in turn maps to the left red region.

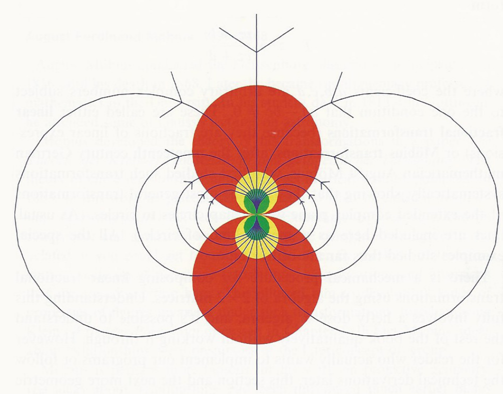


Figure 3.6. A conjugate of a translation. This illustrates the conjugation of a translation by the map $z \mapsto 1/z$. The origin is fixed and the blue circles are trajectories of the map. The colours show the successive powers of the map: the small bottom green region is expanded to the yellow region, then to the red, then to the whole outer white region (including ∞). This is then contracted first to the top red region, then to the top yellow region then to the green. This figure also results from stereographic projection of the map in Figure 3.5 it after turning that sphere upside down.

Eine Parabolische Möbius-Transformation: Das obere Bild zeigt die Verschiebung in der komplexen Ebene und ihr Urbild unter der stereographischen Projektion auf der Sphäre. Das untere Bild zeigt die Draufsicht auf den Nordpol. Aus: D. Mumford, C. Series, D. Writht: *Indra's Pearls*.

Aufgabe 6.5* (Die komplex-projektive Gerade $\mathbb{C}P^1$)
Die komplex-projekive Gerade $\mathbb{C}P^1$ besteht als Menge aus allen Geraden (durch den Nullpunkt) in $\mathbb{C}^2$. Für einen Punkt $Z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 - 0$ sei $\ell = \operatorname{Span}(Z)$ der von ihm aufgespannte 1-dimensionale komplexe Unterraum. Unter der Äquivalenzrelation $Z \sim Z' \iff Z = \lambda Z'$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}^\bullet$ ist $\mathbb{C}P^1$ genau die Menge der Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklasse von $Z = (z_1, z_2)$ bezeichnet man traditionell durch $[z_1 : z_2]$, um anzudeuten, daß man einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor herausgekürzt hat. Wir fassen die Skalarmultiplikation als Gruppenoperation $\mathbb{C}^\bullet \times \mathbb{C}^2 - 0 \longrightarrow \mathbb{C}^2 - 0$ und schreiben $\mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C}^2 - 0)/\mathbb{C}^\bullet$. Die Topologie auf $\mathbb{C}P^1$ sei die Quotiententopologie. Die Quotientenabbildung nennen wir $p\colon \mathbb{C}^2 - 0 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$, also $p(z_1, z_2) = [z_1 : z_2]$.

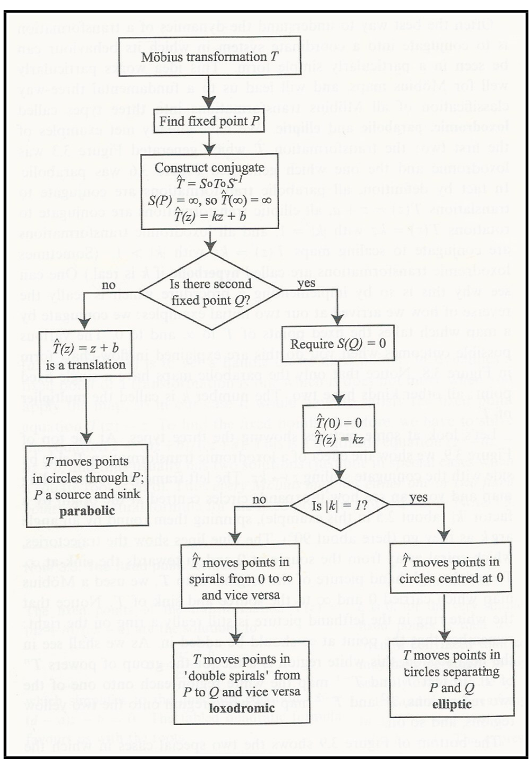
(1) Wenn man mit topologischen Techniken schon genug vertraut ist, so betrachte man auf der kleineren Menge der 3-Sphäre $\mathbb{S}^3 = \{Z \in \mathbb{C}^2 - 0 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ die entsprechende Äquivalenzrelation $Z \sim Z' \iff Z = \lambda Z'$ für ein $\lambda \in \mathbb{S}^1$ oder eingeschränkte Gruppenoperation. Man zeige: Die offensichtliche Abbildung $\mathbb{S}^3/{\sim} \longrightarrow \mathbb{C}^2 - 0/{\sim}$ ist eine Bijektion und damit ein Homöomorphismus $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \longrightarrow (\mathbb{C}^2 - 0)/\mathbb{C}^\bullet$. Es folgt weiter, daß $\mathbb{C}P^1$ kompakt ist.

(2) Die Abbildung $q\colon \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ mit $[z_1 : z_2] \mapsto z_1/z_2$, falls $z_2 \neq 0$, und $[z_1 : 0] \mapsto \infty$, falls $z_2 = 0$, ist ein Homöomorphismus.

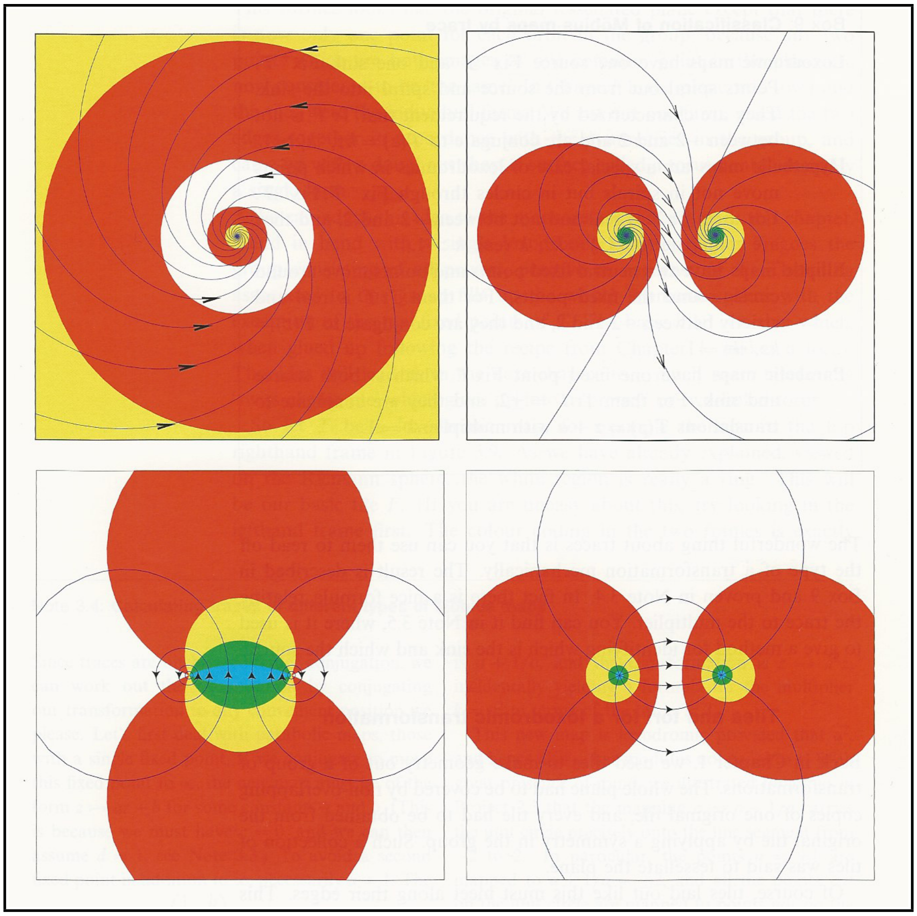
(3) Die Matrix A interpretiern wir wie gewohnt als lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^2$. Sie induziert eine *projektive Abbildung* $P(A)\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ durch $P(A)(\ell) = A(\ell)$, das Bild der Geraden ℓ unter A. Dies ist ein Homöomorphismus.

(4) Wir legen in den $\mathbb{C}^2$ zwei affine Ebenen, nämlich $H_1 := \{Z = (z_1, 1) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \in \mathbb{C}\}$ parallel zu ersten Koordinatenachse, und $H_2 := \{Z = (1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 \in \mathbb{C}\}$ parallel zu zweiten Koordinatenachse. Jede Gerade L schneidet H_1 und H_2 genau einmal, außer $\ell_1 = \mathrm{Span}((1,0))$ und $\ell_2 = \mathrm{Span}((0,1))$, welche nur H_2 bzw. nur H_1 einmal schneiden. Man zeige, daß $\mathbb{C}P^1$ eine (komplexe 1-dimensionale) Mannigfaligkeit ist. Dazu finde man zwei Kartengebiete U_1, U_2 in $\mathbb{C}P^1$ und zwei Karten κ_1, κ_2 auf Kartenbilder Ω_1, Ω_2 in $\mathbb{C}$. Man bestimme den Kartenwechsel. [Daß man hier $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{C}$ wählen kann, ist Zufall.]

Bemerkungen: 1. Wir sehen also, wie aus der Matrix A drei sozusagen äquivalente Homöomorphismen entstehen: die projektive Selbstabbildung $P(A)$ des $\mathbb{C}P^1$, die Möbius-Transformation f_A auf $\bar{\mathbb{C}}$ und deren Urbild $S^{-1} \circ f_A \circ S$ unter der stereographischen Projektion S als Selbstabbildung der $\mathbb{S}^2$.
2. Die Projektionsabbildung $\eta\colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{C}P^1 \cong \bar{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$ mit $\eta(z_1, z_2) = [z_1 : z_2] = z_1/z_2$ (wobei wir die stereographische Projektion stillschweigend benutzen) heißt *Hopf-Abbildung* und ist für die Homotopietheorie äußerst wichtig.



Ein Algorithmus zur Klassifikation der Möbius-Transformationen. Bild a.a.O.



Links oben eine loxodromische Möbius-Transformation, links ein vergrößerter Ausschnitt um den anziehenden Fixpunkt. Links unten eine elliptische Möbius-Transformation. Rechts eine hyperbolische. Bilder a.a.O..

Aufgabe 6.6* (Klassifikation der Möbius-Transformationen)

Sei $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ die Möbius-Transformation zur Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Die Matrix A ist nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt. Deshalb nehmen wir das normierte Spurquadrat $\tau(f) := \mathrm{Spur}(A)^2/\det(A)$ als eine wohldefinierte Größe von f.

Wir nennen zwei f und g in der Möbius-Gruppe $\mathfrak{M}$ *konjugiert*, falls es ein $h \in \mathfrak{M}$ gibt mit $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Da h ein Homöomorphismus ist, sind f und g in den wesentlichen Merkmalen gleich, wie Anzahl der Fixpunkte und deren Eigenwerte (im Sinne von Aufgabe 5.3). Man zeige zunächst:

(0) Sind f und g konjugiet, so ist $\tau(f) = \tau(g)$.

Für die Klassifikation nehmen wir $f \neq \mathrm{id}$ an und beweisen:

(I) Besitzt f nur einen Fixpunkt $F \in \bar{\mathbb{C}}$, dann ist f konjugiert zu $g(z) = z + 1$. Der Fixpunkt von g ist ∞. Die Invariante ist $\tau(f) = 4$.

(II) Besitzt f zwei Fixpunkte $F_1, F_2 \in \bar{\mathbb{C}}$, dann ist f konjugiert zu einem g der Form $g(z) = \lambda\, z$. Die beiden Fixpunkte von g sind 0 und ∞. Die Invariante ist $\tau(f) = \lambda + 2 + \lambda^{-1}$.

Erläuterung: Im Fall (II) nennt man die Zahl $\lambda \neq 0, \neq 1$ den Multiplikator von f am Fixpunkt 0. Vertauscht man die Rollen der beiden Fixpunkte, so ändert sich der Multiplikator in λ^{-1}. Haben die beiden Multiplikatoren λ, λ^{-1} nicht den Betrag 1 und sei etwa $|\lambda| > 1$, so ist einer der Fixpunkte, etwa F_1, abstoßend und der andere anziehend, d.h. $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = F_2$ und $\lim_{n\to\infty} g^{-n}(z) = F_1$ für alle $z \neq F_1, F_2$. Für $g(z) = \lambda z$ ist 0 der abstoßende Fixpunkt und ∞ der anziehende Fixpunkt unter der Iteration von f, wenn $|\lambda| > 1$. Ist $|\lambda| = 1$, so verhalten sich die beiden Fixpunkte neutral, d.h. weder anziehend noch abstoßend, kein Punkt $z \neq F_1, F_2$ wandert unter Iteration von f nach F_1 oder F_2. Man studiere die Bilder.

Nomenklatur:
(a) Man nennt f *parabolisch*, wenn es genau einen Fixpunkt hat (Fall I).
(b) Man nennt f *elliptisch*, wenn es zwei Fixpunkte hat und für den Multiplikator $|\lambda| = 1$ und $\lambda \neq \pm 1$ gilt.
(c) Man nennt f *loxodromisch*, wenn es zwei Fixpunkte hat und $|\lambda| \neq 1$ gilt.
(d) Den Unterfall mit zwei Fixpunkten und λ reell und $\tau(f) > 4$ nennt man *hyperbolisch*.

Man zeige:

(b) f ist genau dann elliptisch, wenn $\tau(f) \in [0, 4[$ gilt.

(a) f Ist genau dann parabolisch, wenn $\tau(f) = 4$ gilt.

(d) f ist genau dann hyperbolisch, wenn $\tau(f) \in]4, \infty[$ gilt.

(c) f ist genau dann echt-loxodromisch (d.h. nicht hyperbolisch), wenn $\tau(f) \in [0, \infty]$ gilt.

Man wende die Klassifikation auf die Möbius-Trasformation $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$ an, berechne $\tau(f)$, bestimme den Typ und ggf. den Multiplikator. Man mache sich dann noch folgendes klar: Hat eine (nicht-identische) Möbius-Transformation endliche Ordnung n, so muß sie elliptisch sein und ihr Muliplikator ist eine n-te Einheitswurzel.

Information der Fachschaft:

Die Fachschaft Mathematik feiert am 9. Mai ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 06.05., Di. 07.05. und Mi 08.05. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf `fsmath.uni-bonn.de`.

The student council of mathematics will organize the math party on May 9th in N8schicht. The presale will be held on Mon 6/05, Tue 7/05 and Wed 8/05 in the mensa Poppelsdorf. Further information can be found at `fsmath.uni-bonn.de`.