

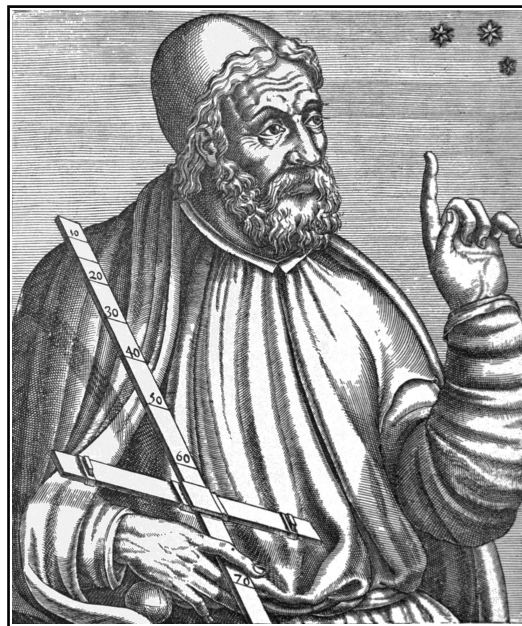
Übungsaufgaben zur  
**Einführung in die Komplexe Analysis**

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 6. Mai 2019

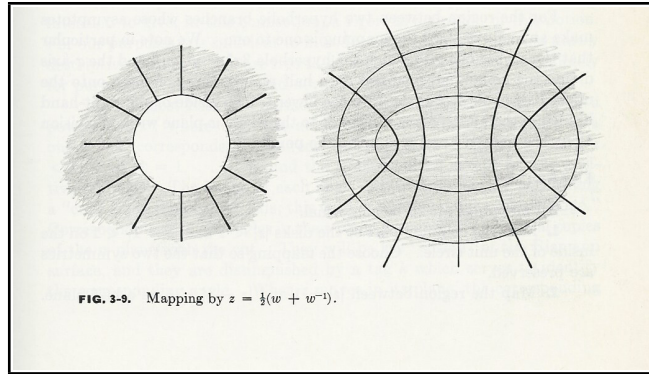


Claudios Ptolemaios (ca. 100-160 n. Chr.) war nicht nur als Astronom bedeutend. Die Mathematik verdankt ihm den Satz über Sehnenvierecke und damit die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

**Aufgabe 5.1** (Joukowski<sup>1</sup>-Funktion)

Die Joukowski-Funktion  $J: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist gegeben durch  $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  und  $J(0) = \infty$ ,  $J(\infty) = \infty$ . Wegen  $J(z) = J(1/z)$  ist sie nicht injektiv. Wohin wird  $\mathbb{S}^1$  abgebildet? Wohin das Innere und wohin das Äußere der Einheitsscheibe  $\mathbb{D}$ ? — Man verwende klugerweise Polarkoordinaten und zeige:

- (i) Das Bild einer Kreislinie  $|z| = r$  mit  $r > 0$ , ist eine Ellipse  $E(r) = E(1/r)$  mit den Brennpunkten  $\pm 1$  und den Halbachsen  $a = \frac{r^2+1}{2r}$  und  $b = \frac{|r^2-1|}{2r}$ . Die Ellipse  $E(1)$  in das Intervall  $[-1, +1]$  ausgeartet.
- (ii) Das Bild der Halbgeraden  $\arg(z) = \varphi$  mit  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ , ist ein halber Hyperbelast  $H(\varphi) = H(-\varphi)$  mit den Brennpunkten  $\pm 1$  und Scheitelabstand  $2 \cos(\varphi)$  und Öffnungswinkel  $\varphi$ . Die Hyperbeläste  $H(0), H(\pi/2), H(\pi)$  sind zu unendlichen Intervallen ausgeartet.



Die Joukowski-Funktion aus L. V. Ahlfors: *Complex Analysis*

Bemerkung: Damit kann man auch leicht das Abbildungsverhalten der Funktionen  $\cos(z) = J(e^{iz})$  und  $\cosh(z) = J(e^z)$  studieren, sowie von  $\sin(z) = -J(i e^{iz})$  und  $\sinh(z) = -J(i e^z)$ .

### Aufgabe 5.2 (Tangens)

Es sei  $\Omega$  durch  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < +\frac{\pi}{2}$  gegeben und  $\tan: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  die Tangensfunktion  $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ . Man zeige:

(a) Das Bild von  $\Omega$  unter dem Tangens ist  $\mathbb{C} - \{it \mid |t| \geq 1\}$ , eine doppelt geschlitzte Ebene.

(b) Für die Umkehrfunktion Arcustangens gilt:  $\arctan(\zeta) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right)$ .

(c)\* Was sind die Bilder des Intervalls  $] -\pi/2, +\pi/2[$ , der anderen horizontalen Intervalle  $\operatorname{Im}(z) = y_0$  und der Vertikalen  $\operatorname{Re}(z) = x_0$ ? [Hinweis: Man zerlege  $z \mapsto \tan(z)$  in die vier Abbildungen  $z \mapsto 2iz$ ,  $z \mapsto \exp(z)$ ,  $z \mapsto M(z) := (1-z)/(1+z)$ , und  $z \mapsto iz$ . Das hat man in (b) gerade gemacht. Nun überlege man sich, was dabei mit den horizontalen Intervallen  $I(y_0)$ , bestimmt durch  $\operatorname{Im}(z) = y_0$ , und den vertikalen  $V(x_0)$ , bestimmt durch  $\operatorname{Re}(z) = x_0$ , nacheinander geschieht. Einzig die Bilder unter der Möbius-Transformation  $M$  sind nicht offensichtlich; man verwende dafür die Sätze und Beispiele der Vorlesung.]

### Aufgabe 5.3 (Eigenwerte einer Möbius-Transformation)

Für eine Matrix  $A \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$  seien  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$  zwei verschiedene Eigenwerte mit den Eigenvektoren  $(w_1, w_2)$  bzw.  $(w'_1, w'_2)$  in  $\mathbb{C}^2$ . Dann sind  $w = w_1/w_2$  und  $w' = w'_1/w'_2$  die Fixpunkte der dazugehörigen Möbius-Transformation  $M_A$ .

### Aufgabe 5.4 (Doppelverhältnis)

Vier verschiedene Punkte  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  liegen genau dann auf einem verallgemeinerten Kreis<sup>2</sup>, wenn ihr Doppelverhältnis  $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)$  reell ist.

### Aufgabe 5.5\* (Ptolemäus, die Additionstheoreme des Sinus und Cosinus, die Inversion am Kreis und dann noch Pythagoras)

Es seien  $A, B, C, D$  vier Punkte auf einem Kreis um  $P$ , etwa im Gegenuhrzeigersinn angeordnet. Der **Satz des Ptolemäus** besagt: *Im Viereck  $A, B, C, D$  ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten gleich dem Produkt der Diagonalen.*

$$ac + bd = ef$$

Wir beweisen diesen Satz mithilfe der Inversion am Kreis. Man erinnere sich an das dritte Bild auf Blatt 4.

(i) Sei  $I = I_Q^{\rho}: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  die Inversion am Kreis um  $Q$  mit Radius  $\rho > 0$ . Sie ist gegeben durch

$$I(z) = Q + \frac{\rho^2}{z - Q}, \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, z \neq Q, \quad \text{sowie } I(Q) = \infty \text{ und } I(\infty) = Q.$$

Man zeige, daß  $I$  verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise abbildet. Dabei geht ein Kreis durch  $Q$  in eine Gerade über, und eine Gerade .....

<sup>1</sup>N. J. Joukowski (1847 - 1921) war ein russischer Aerodynamiker und studierte mit dieser Funktion Tragflächenprofile.

<sup>2</sup>Wir wollen unter dem Begriff *verallgemeinerter Kreis* hier und in Zukunft sowohl die üblichen Kreise um einen Punkt in  $\mathbb{C}$  mit endlichem Radius verstehen als auch alle Geraden in  $\mathbb{C}$ , auch solche nicht durch den Nullpunkt.

[38.] *Satz des Ptolemäus<sup>1</sup>: Im Sehnenviereck ist das Rechteck aus den Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten. Anleitung zum Beweis: Legt man in dem Sehnenviereck  $ABCD \not\sim ACD$  an  $CB$  in  $C$  nach innen an und schneidet den freien Schenkel mit  $BD$  in  $E$ , so ist  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$  und  $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ . Stelle Verhältnisgleichungen für  $a : e$  und  $d : e$  auf, bilde die Produktgleichungen und addiere.*

39. Schreibe den Satz des Ptolemäus a) für ein Rechteck, b) für ein gleichschenkeliges Trapez an. Welcher Satz ergibt sich?

Aus dem Lambacher-Schweitzer, Mathematisches Unterrichtswerk für Höhere Schulen: Geometrie A2, 4. Auflage (ohne Jahresangabe, vermutlich um 1950).

(ii) Für den Abstand der Bildpunkte gilt:

$$|I(z) - I(w)| = \frac{\rho^2}{|z - Q||w - Q|} |z - w| \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}.$$

(iii) Für den Beweis des Satzes wähle man irgendeinen Kreis um  $D$  mit irgendeinem endlichen Radius  $\rho > 0$ . Unter  $I = I_D^\rho$  geht  $D$  nach  $\infty$ ; und die drei Punkte  $A' = I(A)$ ,  $B' = I(B)$  und  $C' = I(C)$  nach (i) liegen auf einer Geraden. Für ihre Abstände gilt folglich:

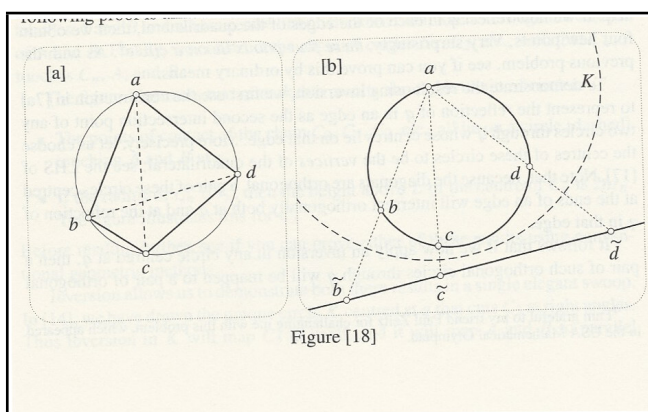
$$|A' - B'| + |B' - C'| = |A' - C'|.$$

Nun benutzt man die Abstandsformel aus (ii).

(iv) Die Additionstheoreme brauchen wir nur für den Sinus beweisen. Dafür nehmen wir an, daß  $A$  und  $C$  diametral sind, und bezeichnen die Winkel  $\angle(DPA)$  bzw.  $\angle(APB)$  mit  $\varphi$  bzw. mit  $\psi$ .

N.B.: Ptolemäus hat eigentlich nicht mit unserem modernen Sinus gearbeitet, sondern mit den Sehnenslängen  $\text{ptsinus}(\varphi) := 2 \sin(\frac{\varphi}{2})$ .

(v) Und nun noch der Pythagoras, wenn die Punkte  $A, B, C, D$  ein Rechteck bilden. — Aber halt: Sind beliebige Rechtecke auch Sehnenvierecke?



Links ein Sehnenviereck, rechts nach Inversion am Kreis  $K$ . (Die Notation in der Aufgabe 5.5 und in diesem Bild stimmen nicht überein.) Aus T. Needham *Visual Complex Analysis*.



$w = 1$ .

The transformation (4) is of importance in certain aerodynamical applications. This is due to the fact that (4) maps the outside of certain circles onto the outside of curves which have the general character of airplane wing profiles. Consider a circle  $C$  in the  $z$ -plane which passes through the point  $z = 1$  and contains the point  $z = -1$  in its interior. Since the derivative  $w'(z)$  vanishes at  $z = 1$ ,  $z = 1$  is a critical point of the transformation and the angles whose vertices are at  $z = 1$  are doubled. Hence, if  $D$  denotes the exterior of  $C$  and  $D^*$  is the conformal map of  $D$ , the boundary of  $D^*$  will have an angle of  $2\pi$  at the point corresponding to  $z = 1$ . If  $C$  is symmetrical with respect to the real axis,  $C$  contains the circle  $|z| = 1$ . Since the latter is mapped onto the  $w$ -plane with a slit from  $w = -1$  to  $w = 1$ , the map of the domain  $D$  bounded by such a circle  $C$  which is fairly close to  $|z| = 1$  will therefore be of the type indicated in Fig. 30. If  $C$  is not symmetrical with respect to the real axis, more general profiles can be obtained in this fashion. An example is indicated in Fig. 31. The shapes obtainable in

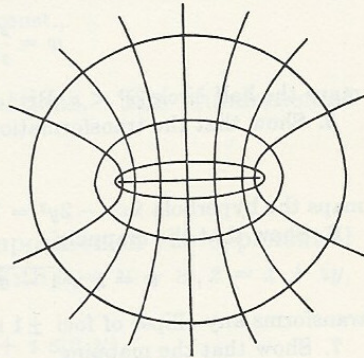


FIG. 29.

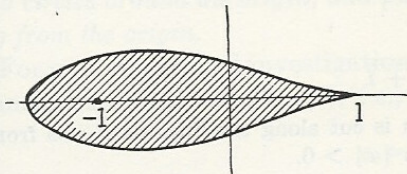


FIG. 30.

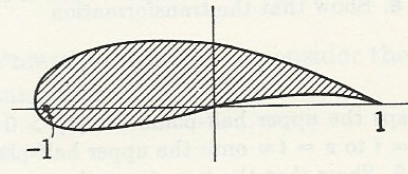


FIG. 31.

this way are known as *Joukowski profiles*. If the circle  $C$  is replaced by a nearly circular curve, the transformation (4) will yield a shape which is close to a Joukowski profile. With the help of the mappings of Sec. 11, Chap. V, it is therefore possible to map a circle onto a wide variety of wing profiles.

Zur Joukowski-Funktion, aus Z. Nehari: *Conformal Mapping*.