Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 4 **Abgabetermin: Montag, 29. April 2019**

Carl-Friedrich Gauß (1777-1855) hat als erster einen vollständigen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra gefunden; das war in seiner Dissertation *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (Neuer Beweis des Satzes, dass jede algebraische rationale ganze Funktion einer Veränderlichen in reelle Faktoren des ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann) (1799) an der Universität Helmstädt bei Johann Friedrich Pfaff.

Aufgabe 4.1 (Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus)
Man beweise vier der folgenden Formeln:

(1) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$

(2) $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$

(3) $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$

(4) $\cosh(z+2\pi i) = \cosh(z)$

(5) $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh(z)$

(6) $\cosh(z) = \cos(iz)$

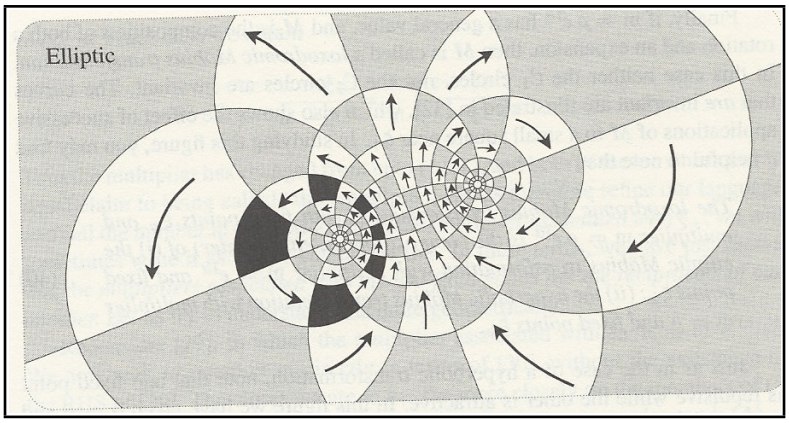
(7) $\sinh(z) = -i\sin(iz)$

(8) $\cosh(z) + \sinh(z) = \exp(z)$

Aufgabe 4.2 (Stereographische Projektion)
Die stereographische Pojektion $S\colon \mathbb{S}^2 \to \bar{\mathbb{C}}$ ist in Formeln durch $S(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3})$ gegeben.
(a) Man zeige:

- $S(-x_1, x_2, x_3) = -\overline{S(x_1, x_2, x_3)}$
- $S(x_1, -x_2, x_3) = \overline{S(x_1, x_2, x_3)}$
- $S(x_1, x_2, -x_3) = \overline{S(x_1, x_2, x_3)^{-1}}$, die Inversion am Einheitskreis (siehe Bild 3.).

(b) Wir führen an der Sphäre eine Drehung D_θ um die x_1-Achse mit Drehwinkel θ durch. Welche Abbildung $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ ist das ? Man finde eine Formel für $f = S \circ D_\theta \circ S^{-1}$. Hat f Fixpunkte ? Gibt es invariante Geraden oder invariante Kreise ? Vgl. hierzu Aufgabe 4.3(3).



Zur Aufgabe 4.2(b): Bild einer elliptischen Bewegung (aus T. Needham: *Visual Complex Analysis*).

Aufgabe 4.3 (Chordale Metrik)
Es sei $\chi(z, w)$ die chordale Metrik auf $\bar{\mathbb{C}}$, also

$$\chi(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}, \qquad \chi(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Für einen Punkt auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ benutzen wir nicht nur die kartesischen Koordinaten $P = (x_1, x_2, x_3)$, sondern auch die Polarkoordinaten $P = (r; \phi, \psi)$ mit Radius $r = 1$ und Längengrad $0 \le \phi \le 2\pi$ und Breitengrad $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$, also $x_1 = \cos\psi \cos\phi$, $x_2 = \cos\psi \sin\phi$ und $x_3 = \sin\psi$. Man zeige:

(1) Für jeden Punkt z gibt es genau einen Punkt z^* in maximaler Entfernung 2; man bestimme diesen Punkt. Vgl. Aufgabe 4.2(a).

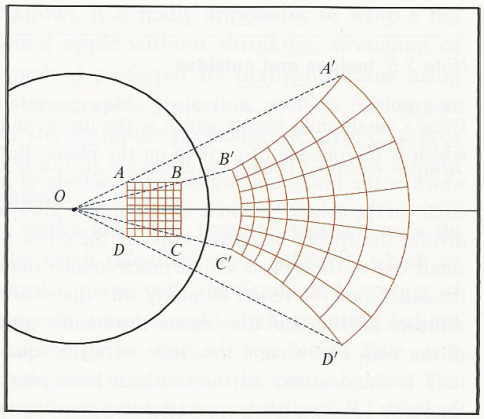
(2) Es sei $P_0 = (0, 0, -1)$ der Südpol und der Punkt $Q(\psi)$ durchlaufe einen halben Großkreis vom Südpol und zum Nordpol, also $Q(\psi) = (1; \phi_0, \psi)$ mit festem ϕ_0 und $-\pi/2 \le \psi\pi/2$. Der Bildpunkt von P ist 0, und der Bildpunkt $w(\psi)$ von $Q(\psi)$ läuft auf einer Geraden vom Nullpunkt nach ∞. Dann ist $\chi(0, w(\psi)) = 2\sin(\psi/2)$.

(3) Wir bezeichnen mit $K_r^\chi(c)$ den Kreis bzgl. der chordalen Metrik um $c \in \bar{\mathbb{C}}$ mit Radius $0 \leq r \leq 2$, also $K_r^\chi(c) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid \chi(c,z) = r\}$. Man zeige $K_r^\chi(c) = K^\chi_{\sqrt{4-r^2}}(c^*)$ und bestimme diese Mengen für $c = 0, \infty$ und $c = 1, -1$. Vgl. Aufgabe 3.2.

Note 2.4: **Inverting in a circle**

Inverting in a circle is a geometrical operation which can be defined for any circle in the plane. This figure shows the effect of inverting a red square in a black circle. Suppose that the centre of the circle is O and its radius is R. The rule which defines inversion is the following. Join the point P which you wish to map to O by a line, and suppose the distance from O to P is r. Then map P to the point P' on the same ray through O at distance R^2/r from O. The inversions of the four corners A, B, C, and D of the square are marked A', B', C' and D', respectively. Inversion bends the sides of the square into circular arcs. It is a flip which maps the inside of C to the outside and vice versa, and is often described as 'reflection' in the 'mirror' C. As with ordinary reflection, points on the mirror itself are left fixed. The centre O is mapped to 'infinity' and 'infinity' is mapped to O. We can get a nice formula for the inverse of a point z in a circle whose centre is the complex number a by conjugating by the map $z \mapsto T(z) = Rz + a$ which maps the unit circle onto the new circle. You first apply T^{-1}, then apply $z \mapsto 1/\bar{z}$ to invert in the unit circle, then finally apply T to get the inversion in our circle. Performing this three-step manoeuvre produces the formula for inversion:

$$z \mapsto a + \frac{R^2}{\overline{z-a}}.$$



Die Inversion an einem beliebigen Kreis (aus D. Mumford, C. Series, D. Wright: *Indra's Pearls - The vision of Felix Klein*).

Aufgabe 4.4 (Stetige Fortsetzbarkeit von Funktionen auf $\bar{\mathbb{C}}$)
Man zeige (in drei der sieben Fälle)

- ... daß man jede invertierbare reell-lineare Abbildung,
- ... daß man jede invertierbare reell-affine Abbildung,
- ... daß man die Invertierung $z \mapsto 1/z$
- ... daß man jedes Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ auf $\bar{\mathbb{C}}$,
- ... daß man jede rationale Funktion $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^m}$,
- ... daß man die Exponentialfunktion aber nicht,
- ... daß man den Cosinus und den Sinus ebensowenig

stetig auf $\bar{\mathbb{C}}$ fortsetzen kann.

Aufgabe 4.5* (Fundamentalsatz der Algebra)
Es sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ein komplexes Polynom mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$. Wir wollen beweisen, daß es mindestens eine Nullstelle hat, damit also auch insgesamt n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) hat; es

zerfällt also in n Linearfaktoren.

(i) Man schreibe

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right) = z^n \, q(z)$$

und sieht sofort, daß $\lim_{z\to\infty} q(z) = a_n$ und $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$ ist. Etwas genauer folgere man die folgende Abschätzung:

$$\text{Es gibt ein } R > 0 \text{ mit} \qquad \frac{1}{2}\,|a_n|\,|z|^n \le |p(z)| \le \frac{3}{2}\,|a_n|\,|z|^n \qquad \text{für alle } |z| > R.$$

(ii) Wir nehmen $p(c) \neq 0$ für irgendein $c \in \mathbb{C}$ an, betrachten $f(z) = p(z + c)$ und schreiben $f(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n = b_0 + b_k z^k + z^k g(z)$ für ein bestimmtes $1 \le k \le n$, $b_k \neq 0$, und einem Polynom $g(z)$ vom Grad $n - k$ mit $g(0) = 0$. Ist w eine k-te Wurzel von $-b_0/b_k$, so untersuche man die reell-wertige Funktion $t \mapsto |f(tw)|$ und zeige:

$$\text{Es gibt ein } \varrho > 0, \text{ so daß} \quad |f(tw)| \le |b_0| \quad \text{ gilt für alle } 0 \le t < \varrho.$$

(iii) Damit folgere man das **Minimumprinzip für Polynome**: Wenn $p(c) \neq 0$, dann gibt es in jeder Umgebung von c ein ζ mit $|p(\zeta)| < |p(c)|$.

(iv) Nun folgt der **Fundamentalsatz der Algebra**: Weit draußen kann es wegen (i) keine Nullstelle geben; und in dieser Kreisscheibe $|z| \le R$ sei etwa c ein Minimum des Betrags $|p(z)|$; dieses c kann aber nach (iii) nur dann ein lokales Minimum sein, wenn es eine Nullstelle ist.

Bemerkung: Man sagt: *Für jedes kompakte Gebiet nimmt $|p(z)|$ sein Minimum auf dem Rand an.* Dieses Minimumprinzip gilt — wie wir noch sehen werden — ganz allgemein für holomorphe Funktionen und für harmonische Funktionen im Komplexen und ist ein bedeutender Unterschied zum Reellen. Der Beweis oben zeigt es zwar nicht, aber es gilt sogar mehr: eine ganze Umgebung von $p(c)$ liegt im Bild von p, d.h. p ist eine offene Abbildung. Auch dies ist ein Unterschied zwischen reellen und komplexen Polynomen.