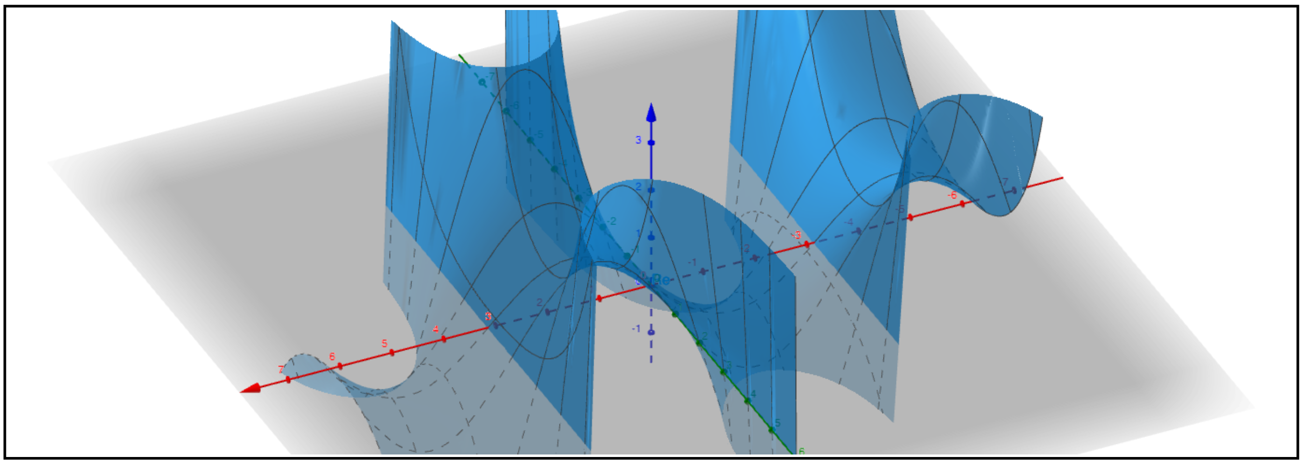
Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 3 **Abgabe: Dienstag, 23. April 2019, 8:15 - 10:15 Uhr im Sekretariat Raum 4.011**



Realteil der Sinusfunktion

Aufgabe 3.1 (Die kompaktifizierte Zahlenebene $\bar{\mathbb{C}}$)
Es sei $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die abgeschlossene komplexe Ebene, also die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$. Man zeige:

(a) $\mathbb{C}$ ist in $\bar{\mathbb{C}}$ offen.

(b) $\mathbb{C}$ ist in $\bar{\mathbb{C}}$ dicht.

(c) $\bar{\mathbb{C}}$ ist wegzusammenhängend.

(d) Jede stetige Funktion $\bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ ist beschränkt.

Aufgabe 3.2 (Stereographische Projektion)
Es bezeichne $S\colon \mathbb{S}^2 \to \bar{\mathbb{C}}$ die stereographische Projektion vom Nordpol der Einheitssphäre es $\mathbb{R}^3$ auf die komplexe Ebene. Man beantworte folgende Fragen durch Bestimmungsstücke von Urbild und Bild:

1. Was ist das Bild eines Großkreises auf $\mathbb{S}^2$?

2. Was ist das Bild eines Kleinkreises auf $\mathbb{S}^2$?

Aufgabe 3.3 (Nicht-Existenz stetiger Umkehrfunktionen)
Wir wissen, daß man aus jeder komplexen Zahl eine Quadratwurzel ziehen kann; und wir wissen, daß man dies auf ganz $\mathbb{C}$ nicht stetig machen kann, d.h. es gibt keine stetige Funktion $Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $Q(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man zeige:

(a) Die Argumentfunktion kann nicht stetig auf ganz $\mathbb{C}^\bullet := \mathbb{C} - \{0\}$ definiert werden, d.h. es gibt keine stetige Funktion $A\colon \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{R}$ mit $|z| \exp(iA(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^\bullet$.

(b) Der Logarithmus kann nicht stetig auf ganz $\mathbb{C}^\bullet$ fortgesetzt werden, d.h. es gibt keine stetige Funktion $L\colon \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}$ mit $\exp(L(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^\bullet$.

[Hinweis: In (a) betrachte man die Funktion $\sqrt{|z|}\exp(iA(z)/2)$.]

Aufgabe 3.4 (Kurven und ihr Bild unter $z^2 - 1$)
Drei der folgenden Kurven $\alpha(t)$ rechne man von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten um bzw. umgekehrt; dann berechne man das Bild der Kurve unter der Abbildung $f(z) = z^2 - 1$.

(1) $\alpha(t) = t\exp(i\phi)$ für $\phi \in \mathbb{R}$

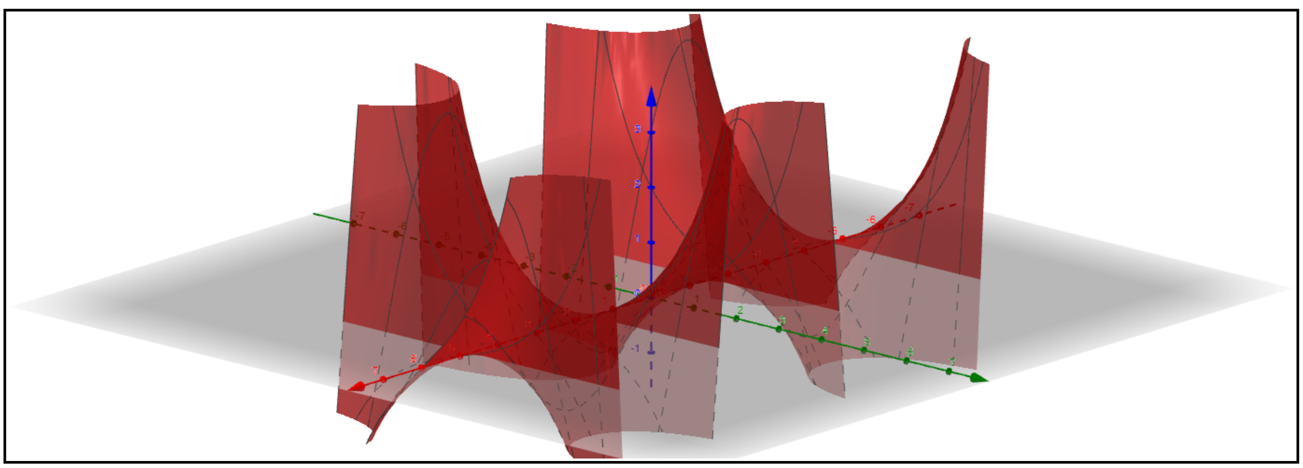
(2) $\alpha(t) = c + \varrho\exp(it)$ für $\varrho > 0, c \in \mathbb{C}$

(3) $\alpha(t) = c + ti$ für $c \in \mathbb{C}$

(4) $\alpha(t) = c + t$ für $c \in \mathbb{C}$

(5) $\alpha(t) = c + td$ für $c, d \in \mathbb{C}$

Nach getaner Arbeit machen Sie sich eine Tasse Kaffee oder Tee und betrachten Sie das Bild der Kurve aus (2) mit $c = 1$ und $\varrho = 1$.



Imaginärteil der Sinusfunktion

Aufgabe 3.5* (Mittelwertsatz für Polynome)
Es sei $f\colon \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und $\mathbb{A} \subset \Omega$ eine endliche Menge mit n Elementen. Wir definieren den Mittelwert von f bezüglich $\mathbb{A}$ als

$$\mathrm{MW}_{\mathbb{A}}(f) := \frac{1}{n}\sum_{z\in\mathbb{A}} f(z).$$

Es gilt offenbar für alle Funktionen f und beliebiges $\mathbb{A}$:
(1) $\mathrm{MW}_{\mathbb{A}}(f)$ ist der Schwerpunkt von $\mathbb{A}$, wenn $f = \mathrm{id}$;

(2) $\mathrm{MW}_{\mathbb{A}}(f) = c$, wenn f konstant gleich c ist;
(3) $\mathrm{MW}_{\mathbb{A}}(f+g) = \mathrm{MW}_{\mathbb{A}}(f) + \mathrm{MW}_{\mathbb{A}}(g)$;
(4) $\mathrm{MW}_{\mathbb{A}}(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{MW}_{\mathbb{A}}(f)$;
(5) $\mathrm{MW}_{c+\mathbb{A}}(f(z)) = \mathrm{MW}_{\mathbb{A}}(f(z+c))$.

Nun interessieren uns für komplexe Polynome $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ mit $a_m \neq 0$. Und wir nehmen als $\mathbb{A} = \mathbb{A}_n(c, \varrho, \theta)$ die n Ecken eines regulären Polygons um $c \in \mathbb{C}$, mit Radius $\varrho > 0$ und um den Winkel θ verdreht, also die Punkte $z_j = c + \varrho \exp(i\theta)\, \omega_n^j$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1$; hier ist $\omega_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ eine n-te Einheitswurzel. Wir schreiben jetzt $\mathrm{MW}_n(f; c)$ für diesen Mittelwert, denn er ist — wie wir gleich mitbeweisen werden — von ϱ und von θ unabhängig. Man zeige:

(i) Sei $a = 0$ und $f(z) = z^m$. Dann ist das Bild von $\mathbb{A}$ ein reguäres N-Gon mit $N = n/\operatorname{ggT}(m, n)$, falls m kein Vielfaches von n ist; und das Bild ist ein Punkt, falls m ein ein Vielfaches von n ist. (Dies gilt für alle ϱ und θ).

(ii) Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ mit $a_m \neq 0$, und $m \geq 1$ und sei $c = 0$. Ist $n > m$, dann ist $\mathrm{MW}_n(f; 0) = f(0) = a_0$. (Dies gilt für alle ϱ und θ).

(iii) Nun betrachten wir für $f(z) = z^m$ ein beliebiges c; ist $n > m$, so behaupten wir $\mathrm{MW}_n(f; c) = c^m$, wiederum für alle ϱ und θ.

[Hinweis: Es ist $\mathrm{MW}_n(z^m; c) = \mathrm{MW}_n((z+c)^m; 0)$ nach (5); da $(z+c)^m$ ein Polynom in z vom Grad m ist, kann man (ii) benutzen.]

(iv) Endlich folgere man den **Mittelwertsatz**: $\mathrm{MW}_n(f; c) = f(c)$ für jedes Polynom $f(z)$ vom Grad m, falls $n > m$.

Bemerkungen:
(1) Gilt ein solcher Satz auch für reelle Polynome ? Genauer: Wie würde man den Mittelwert für reelle Funktionen definieren ? Für welche reellen Polynome gilt dann der Mittelwertsatz ?
(2) Man stelle sich den Limesfall $n \to \infty$ vor: dann sollte aus der Summe ein Integral über eine Kreislinie (mit etwa 2π vielen Punkten ?) werden:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + \varrho\, e^{it})\, dt.$$

(3) Unser Mittelwertsatz wird in dieser Form nicht nur für Polynome gelten, sondern für alle holomorphen Funktionen; er wird eine Folgerung der Cauchy-Integralformel sein.

Wenn Sie so schöne Bilder von Funktionen selbst machen wollen, gehen Sie auf diese www-Seite
`https://www.geogebra.org/m/btAc29yQ`.
Dort finden Sie sehr viel anschauliches Material. Wir werden GeoGebra für einige Übungsaufgaben benutzen.
