Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 2 **Abgabetermin : Montag, 15. April 2019**

Aufgabe 2.1 (Addition in Polarkoordinaten)
Man zeige:

$$e^{i\phi} + e^{i\psi} = 2\,\cos\Big(\frac{\phi-\psi}{2}\Big)\, e^{\frac{i(\phi+\psi)}{2}} \qquad \text{und} \qquad e^{i\phi} - e^{i\psi} = 2i\,\sin\Big(\frac{\phi-\psi}{2}\Big)\, e^{\frac{i(\phi+\psi)}{2}} \quad .$$

Aufgabe 2.2 (Kreise und Geraden)
Es sei $c = a+ib$ der Mittelpunkt eines Kreises $\mathcal{K}$ mit Radius ρ. Schreibt man die Bedingungsgleichung $|z-c|^2 = \rho^2$ aus, so erhält man

$$z\,\overline{z} - \overline{c}\,z - c\,\overline{z} + c\,\overline{c} - \rho^2 = 0.$$

Wir betrachten die etwas allgemeinere Gleichung

$$A\,z\,\overline{z} + B\,z + C\,\overline{z} + D = 0$$

mit A, D reell und B, C komplex und zueinander konjugiert. Für die dadurch gegebene Menge schreiben wir $\mathcal{K}_M$, wenn M die hermitesche Matrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ bezeichnet. Offenbar ist $\mathcal{K}_{\lambda M} = \mathcal{K}_M$ für ein reelles $\lambda \neq 0$. Man nennt $\Delta = \det(M) = AD - BC$ die Diskriminante der Gleichung. Man zeige:

(1) $\mathcal{K}_M$ ist genau dann ein Kreis, wenn $A \neq 0$ und $\Delta < 0$ gilt. Was ist der Mittelpunkt c und der Radius ρ dieses Kreises ?

(2) $\mathcal{K}_M$ ist genau dann eine Gerade, wenn $A = 0$ gilt. Was sind die Bestimmungstücke dieser Gerade ?

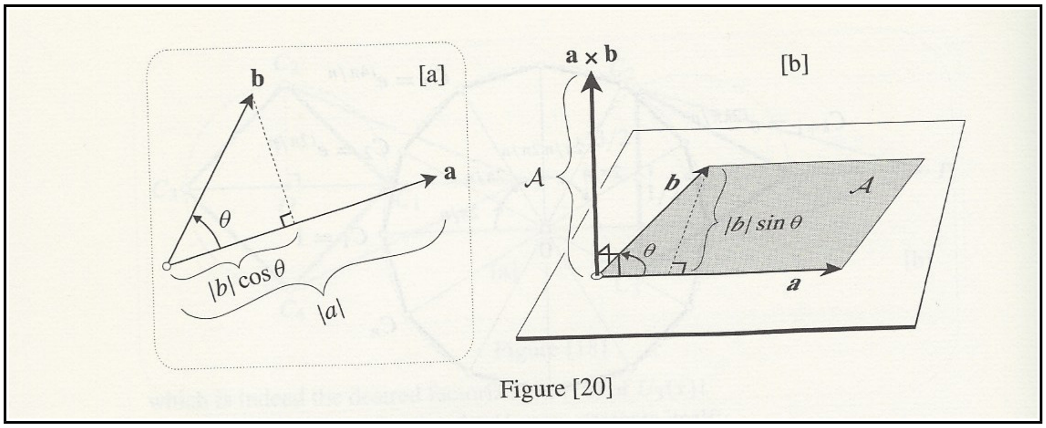
(3) $\mathcal{K}_M$ ist genau dann ein Punkt, wenn $A \neq 0$ und $\Delta = 0$ gilt.

Aufgabe 2.3 (Skalarprodukt und Kreuzprodukt)
$\mathbb{C}$ ist ein komplexer Vektorraum mit dem hermiteschen Skalarprodukt $\langle\langle z, w\rangle\rangle := z\overline{w}$. Offenbar ist es eine Erweiterung des euklidischen Skalarprodukts $\langle z, w\rangle = \mathrm{Re}(z\overline{w})$ des reellen Vektorraumes $\mathbb{C}$. Was ist nun der Imaginärteil $\mathrm{Im}(z\overline{w})$?

- $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-linear-unabhängige Linearformen auf $\mathbb{C}$, also eine Basis für den Dualraum $\mathbb{C}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$.
- Man erinnere sich an das Kreuzprodukt $A \times B$ zweier Vektoren A and B des $\mathbb{R}^3$ und die Rolle des Spatvolumens in der geometrischen Interpretation des Kreuzprodukts; siehe Bild. Faßt man eine komplexe Zahl z als Vektor im $\mathbb{R}^3$ auf mit verschwindender dritter Koordinate, so erhalten wir eine $\mathbb{R}$-Bilinearform

  $$\mathrm{Spat}\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (z, w) \mapsto \mathrm{Spat}(z, w)$$

  als Volumen des von z, w und e_3 aufgespannten Spats. Man zeige: $\mathrm{Spat}(z, w) = \mathrm{Im}(\overline{z}\,w) = -\mathrm{Im}(z\,\overline{w})$.



T. Needham *Visual Complex Analysis*, Seite 28.

Aufgabe 2.4 ($\mathbb{R}$-lineare Abbildungen als Funktionen von z und $\overline{z}$)
Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

(1) Es gibt zwei eindeutig bestimmte Zahlen $A, B \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = A\,z + B\,\overline{z}$.

(2) f ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $B = 0$ gilt.

(3) f ist genau dann invertierbar, wenn $A\overline{A} \neq B\overline{B}$. [Hinweis: Man kann die Determinante ausrechnen; man könnte sich auch überlegen, wann die Diagonalen eines Parallelogramms aufeinander senkrecht stehen.]

(4)* f ist genau dann längentreu, wenn $AB = 0$ und $|A + B| = 1$.

Aufgabe 2.5 (Wurzeln)
Wir wollen die 10 Lösungen der Gleichung $\boxed{(z-1)^{11} = z^{11}}$ finden.

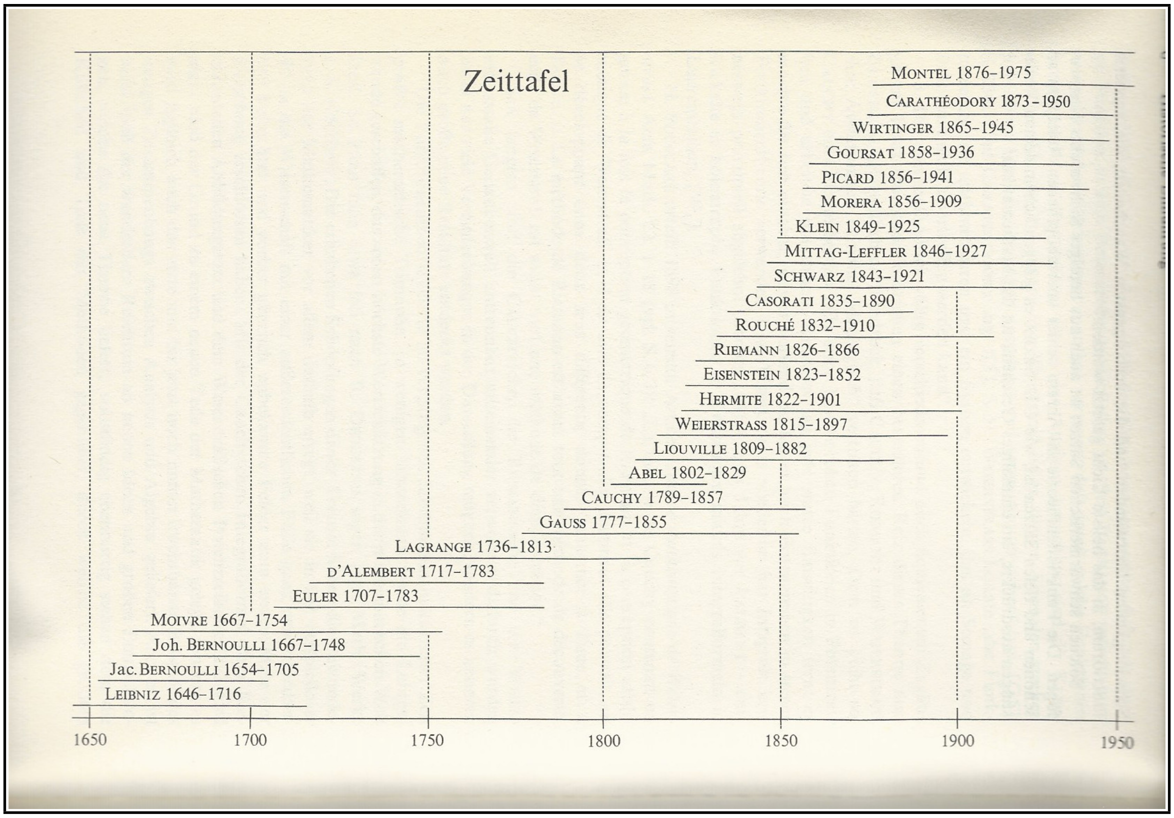
- Für zwei verschiedene $a, b \in \mathbb{C}$ ist $|z - a| = |z - b|$ die Gleichung einer Gerade.
- Die Lösungen liegen alle auf der Vertikalen $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$.
- Durch die Substitution $w = (z-1)/z$ erhalten wir die einfachere Gleichung $w^{11} = 1$. Damit löse man die ursprüngliche Gleichung explizit.

Aufgabe 2.6* (Hamiltonsche Quaternionen)
Es sei $\mathcal{H}$ die Menge aller komplexen 2×2-Matrizen der Form $A = \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ mit beliebigen $z, w \in \mathbb{C}$. Dies ist ein komplexer Vektorraum der Dimension 2 und auch ein reeller Vektorraum der Dimension 4. Man zeige:

- $\mathcal{H}$ ist ein Schiefkörper (d.h. es gelten alle Körperaxiome, ausgenommen das Kommutativgesetz).
- Die Matrizen in $\mathcal{H}$ erfüllen die Gleichung

$$A^2 - \mathrm{Spur}(A)\,A + \det(A)\mathbb{1} = 0.$$

- Die Abbildung $z \mapsto \Phi(z) := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$ ist eine Einbettung von $\mathbb{C}$ als (kommutativer) Unterkörper von $\mathcal{H}$.
- Es gilt $\det(\Phi(z)) = |z|^2$.



R. Remmert: *Funktionentheorie I.*
Zeittafel mit den wichtigsten Personen in der Geschichte der Funktionentheorie. Wer fehlt ?

- Und $\mathrm{Spur}(\Phi(z)) = 2\mathrm{Re}(z)$.
- Sowie $\Phi(\overline{z}) = \overline{\Phi(z)}^T$, die konjugiert-transponierte Matrix.
- Die drei Matrizen $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$ und $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ erfüllen die Gleichungen $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbb{1}$ sowie $IJ = K = -JI$, $JK = I = -KJ$ und $KI = J = -IK$.

Bemerkung 1: Die 8 Matrizen $\pm\mathbb{1}, \pm I, \pm J, \pm K$ bilden die sog. *Quaternionengruppe* Q_8.

Bemerkung 2: Nimmt man zwei 'rein-imaginäre' Quaternionen $\mathbf{a} = \beta I + \gamma J + \delta K$ und $\mathbf{b} = \rho I + \sigma J + \tau K$ mit $\beta, \gamma, \delta, \rho, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$, so ist ihr Produkt in $\mathcal{H}$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbb{1} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ ist und $\times$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist, den man sich hier als aufgespannt von I, J und K denkt; man beachte, daß ab nicht mehr in diesem Unterraum liegen muß; vgl. Aufgabe 2.3.