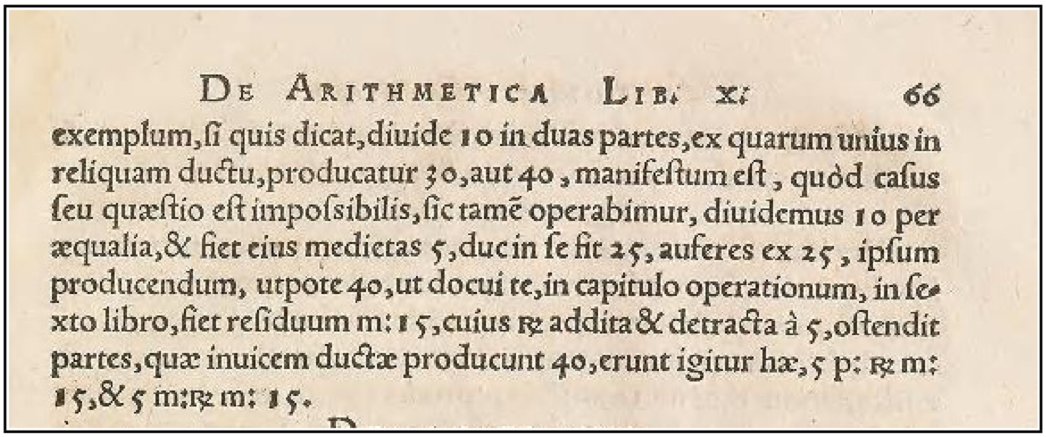
Übungsaufgaben zur

Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2019

Blatt 1 **Abgabetermin : Montag, 8. April 2019**


DE ARITHMETICA LIB. X. 66

exemplum, ſi quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30, aut 40, manifeſtum eſt, quòd caſus ſeu quæſtio eſt impoſsibilis, ſic tamē operabimur, diuidemus 10 per æqualia, & fiet eius medietas 5, duc in ſe fit 25, auferes ex 25, ipſum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in ſexto libro, fiet reſiduum m: 15, cuius ℞ addita & detracta à 5, oſtendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15.

Beispiel. Wenn jemand Dir sagt, teile 10 in zwei Teile, so daß der eine mit dem anderen multipliziert [...] 40 ergibt, so ist es offensichtlich, daß dieser Fall oder Frage unmöglich ist. Trotzdem werden wir ihn [mit unserer Methode] lösen. Sei 10 geteilt in zwei gleiche Teile, 5 sei diese Hälfte. Mit sich selbst multipliziert ist dies 25. Von 25 subtrahiere das Produkt, also 40, welches [...] einen Rest von -15 ergibt. Die Wurzel davon, addiert zu 5 oder subtrahiert von 5, ergibt die Faktoren, die zusammenmultipliziert 40 ergeben. Diese sind $5+\sqrt{-15}$ *und* $5-\sqrt{-15}$.

Aus **G. Cardano: *Ars Magna*** (1545).
Das ganze Buch findet man unter: `https://archive.org/details/hieronymicardan00card/page/n133`.

Aufgabe 1.1 (Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument)

1. Bestimme Real- und Imaginärteil der folgenden Zahlen:

$$(a)\ \frac{i+1}{i-1} \qquad (b)\ \frac{3+4i}{2-i} \qquad (c)\ (2i)^n \ \text{ für } \ n \in \mathbb{Z}\,.$$

2. Man bestimme Betrag und Argument der folgenden Zahlen:

$$(a)\ (2+i)(2-i) \qquad (b)\ \left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n \ \text{für} \ n \in \mathbb{Z} \qquad (c)\ \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^2 .$$

Aufgabe 1.2 (Einheitswurzeln)
Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ setzen wir $\omega_n := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

(i) Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ zeige man:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k \quad = \quad \prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega_n^k)$$

(ii) Daraus folgere man:

$$(1) \qquad \prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}} \qquad \text{und} \qquad (2) \qquad \prod_{k=1}^{n}\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}.$$

Aufgabe 1.3 (Abstandsformeln)

(a) Gegeben seien zwei Punkte z und $w \neq 0$ in $\mathbb{C}$. Gesucht ist eine Formel für den Abstand von z zu der von w aufgespannten Gerade G. (In der Formel sollen nur Addition, Multiplikation, Konjugation und ggf. eine Wurzel vorkommen.)

(b) Gesucht ist der Abstand eines Punktes z von einer Geraden G, die durch zwei verschiedene Punkte p und q gegeben ist.

(c) Gesucht ist der Lotpunkt z' von z auf der Geraden G.

(d) Gegeben sei Brennpunkt F und Leitlinie G einer Parabel. Man finde die Gleichung der Parabel.

Aufgabe 1.4 (Kleine stereographische Projektion)
Es bezeichne $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ den Einheitskreis , $S := \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ und $a \in \mathbb{R}$, aber $a \neq -1$. Wir wollen S vom Punkte $B = -1$ aus auf die vertikale $V_a = \{a + it \mid t \in \mathbb{R}\}$ projezieren, also am Ende eine stetige Bijektion

$$P\colon S \longrightarrow V_a, \quad z \mapsto a + i\,t$$

erhalten.

(i) Man finde zunächst $t = \mathrm{Im}(P(z))$ als Funktion von z durch eine einfache geometrische Überlegung. Offenbar gilt: $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

[Hinweis: Man beginne mit einer Zeichnung; und man kann gerne $a = 0$ setzen, d.h. auf die imaginäre Achse projezieren.]

(ii) Mit der Umkehrung ergibt sich eine Parametrisierung von S: Jedes $z \in S$ läßt sich eindeutig in der Form

$$z \quad = \quad \frac{\alpha + it}{\alpha - it} \quad = \quad \frac{\alpha^2 - t^2}{\alpha^2 + t^2} + \frac{2\alpha t}{\alpha^2 + t^2}\,i$$

mit einem $t \in \mathbb{R}$ schreiben, wobei $\alpha = a + 1$ gesetzt wurde. [Hinweis: Anstatt mit einer quadratischen Gleichung zu hantieren, betrachte man t^2 aus (i) und ersetze darin y^2 durch $1 - x^2$.]

(iii)* Wie könnte man die Projekion P stetig auf ganz $\mathbb{S}^1$ fortsetzen ?

Bemerkung: Wenn t in der Gleichung in (ii) rational ist, so sind Realteil und Imaginärteil von z beide rational. Dies führt auf eine Parametrisierung der pythagoräischen Zahlentripel (k, l, m) mit $k^2 + l^2 = m^2$ wie folgt: ist etwa l gerade (NB: mindestens eine der Zahlen k, l, m muß gerade sein), so gibt es natürliche Zahlen a, b, c mit

$$k = (a^2 - b^2)c\,, \qquad l = 2\,abc \quad \text{und} \quad m = (a^2 + b^2)c\,.$$

Girolamo Cardano (1501 - 1576), ital. Mathematiker, Arzt und Ingenieur, berühmt für die Lösungsformel der kubischen Gleichungen (die allerdings im Kern von Nicolo Tartaglia stammen).

Aufgabe 1.5* (Satz von van Aubel und Satz von Napoleon)

a) Es seien z_1, z_2, z_3, z_4 vier Punkte in $\mathbb{C}$, die wir als die Eckpunkte eines (konvexen) Vierecks mit den Seiten $e_1 := z_2 - z_1,\ e_2 := z_3 - z_2,\ e_3 := z_4 - z_3,\ e_4 := z_1 - z_4$ betrachten. Wir errichten über diesen vier Seiten je ein Quadrat und bezeichnen deren Mittelpunkte mit P_1, P_2, P_3, P_4. (Die Punkte und Seiten seien im Gegenuhrzeigersinn durchnummeriert und die Quadrate seien 'außerhalb' des Vierecks, d.h. rechts von den (gerichteten) Seiten, errichtet.) Der **Satz von van Aubel**[1] besagt: *Die Verbindungsstrecken $P_1 - P_3$ und $P_2 - P_4$ sind gleichlang und stehen aufeinander senkrecht.*

b) Können die Quadrate auch alle links von der jeweiligen Seite liegen ?

c) Haben wir irgendwo die Konvexität benutzt ? Können drei der vier Eckpunkte oder gar alle vier kolliniear sein ? Können zwei oder drei oder gar alle vier der Eckpunkte zusammenfallen ? Was besagt der Satz, wenn zwei benachbarte Eckpunkte zusammenfallen, also eine Seite zu einem Punkt wird und so das Viereck zu einem Dreieck ?
(Siehe und spiele: `http://demonstrations.wolfram.com/VanAubelsTheoremForQuadrilaterals/`)

Bemerkung: Ein ganz ähnlicher **Satz von Napoleon** sagt aus: *Die Mittelpunkte dreier gleichseitiger Dreiecke, errichtet über den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks, bilden ein gleichseitiges Dreieck.*

[1] H.H. van Aubel: *Note concernant les centres de carrés construits sur les côtés d'un polygon quelconque*, Nouvelle Correspondance Mathématique (1878), vol. 4: 40–44.