Analysis 1

18.12.2017
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: Keine Abgabe.

Aufgabensammlung zur Analysis 1

Anmerkungen:

- Das vorliegende Blatt enthält eine Auswahl von Aufgaben, die auf Klausuren zur Analysis 1 an verschiedenen Universtitäten aufgetreten sind, und die von Länge und Schwierigkeitsgrad auch auf der Klausur am Semesterende auftreten könnten. Dies soll Ihnen allein zur Selbsteinschätzung dienen.
- Beachten Sie bitte insbesondere, dass die Aufgaben, die letztlich auf der Klausur gestellt werden, nicht notwendigerweise etwas mit den hier angegebenen zu tun haben müssen.
- Lassen Sie sich pro Aufgabe ca. 15-25 Minuten Bearbeitungszeit. Die Klausur wird voraussichtlich aus 8 Aufgaben bestehen, von denen jede in dieser Zeit bearbeiten werden sollte. So können Sie sich zum Beispiel bei der Bearbeitung dieses Blattes 8 Aufgaben aussuchen und versuchen, diese in 150 Minuten zu lösen.
- Möglicherweise wird es auch in der eigentlichen Klausur eine Multiple-Choice-Aufgabe geben. Die Checklist am Ende dieses Blattes ist nicht notwendigerweise von diesem Format, soll Ihnen hingegen bei der Wiederholung des Stoffes helfen.
- Die Aufgabe sind bewusst nicht nach Themen geordnet.
- Die Bearbeitung dieses Blatts wird *nicht* korrigiert. Es wird voraussichtlich im Januar einen Extratermin geben, an dem dieses Übungsblatt besprochen wird.

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass $k^{2n+1} - k$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 2:
Entscheiden Sie mit Beweis, ob

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

existiert und endlich ist.

Aufgabe 3:
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Begründen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4:
Zeigen Sie direkt anhand der *Definition* der Konvergenz von reellen Zahlenfolgen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenwert.

Aufgabe 5:
Finden Sie mit Beweis all diejenigen $j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j^k \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)}{k^j}$$

konvergiert bzw. absolut konvergiert.

Aufgabe 6:
Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\exp(g(x)) + g(x) = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7:
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Angenommen, $f(x) = x^2 g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion ist. Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(0)$.

(b) Es sei nun f ungerade, d.h., $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es existiere $\lim_{h\searrow} f(h)/h$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar in $x = 0$ ist.

Aufgabe 8:
Es sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h., es existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Aufgabe 9:
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2) - 1.$$

Aufgabe 10:
Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Reihe

$$S(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\log(n)},$$

wobei $\log(n)$ den natürlichen Logarithmus der Zahl n bezeichne.

(i) Zeigen Sie, dass es eine Zahl $R > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für $|z| < R$ konvergiert $S(z)$ in $\mathbb{C}$, und für $|z| > R$ divergiert $S(z)$ in $\mathbb{C}$. Berechnen Sie dieses R.

(ii) Untersuchen Sie die Reihe $S(z)$ auf Konvergenz im Punkte $z = 1$.

(iii) Untersuchen Sie die Reihe $S(z)$ auf Konvergenz im Punkte $z = \mathrm{i}$.

Aufgabe 11:
Zeigen Sie, dass für alle $0 \leq x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x.$$

Aufgabe 12:
Es sei M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass das Bild $f[M] := \{f(x)\colon\ x \in M\}$ beschränkt ist.

Aufgabe 13:
Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2 + a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}_{\geq 1} := \{1, 2, 3, ...\}.$$

Zeigen Sie, dass

(a) für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ gilt.

(b) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie dieses a mit Beweis.

Aufgabe 14:
Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x\log(\frac{1}{x})$ für $0 < x < \infty$. Hierbei bezeichnet log den natürlichen Logarithmus. Bestimmen Sie mit Beweis

$$\sup A \quad \text{und} \quad \inf A,$$

wobei $A := \{f(x)\colon\ x \in (0,\infty)\}$. Entscheiden Sie weiters, ob (i) das Supremum ein Maximum und (ii) das Infimum ein Minimum ist.

Aufgabe 15:
Entscheiden Sie mit Beweis, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$$

konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 16:
Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z := \left(\frac{2 + 2\,\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}\right)^{2017}.$$

Aufgabe 17:
Wie oft ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 e^x & \text{für } x \geq 0, \\ -x^2 e^{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 18:
Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^4 = x + 1$ in $(1, \infty)$ genau eine Lösung besitzt.

Aufgabe 19:
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \mathrm{i}^n + 2^{-n}$.

(i) Bestimmen Sie mit Beweis den Real- und Imaginärteil von $a_n \in \mathbb{C}$.

(ii) Bestimmen Sie mit Beweis $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n)$ und $\limsup_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n)$.

Aufgabe 20:
Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung

$$|\exp(z) - 1| \leq |z| e^{|z|}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\exp(a_n) - 1)$$

absolut konvergiert (in $\mathbb{C}$).

Aufgabe 21:
Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ differenzierbar. Ferner gelte $f(0) = 0$.

(a) Sei $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(x)e^{-\lambda x}$ für $x \in [0,1]$.

(b) Angenommen, f erfülle $f'(x) \leq \lambda f(x)$ mit $\lambda > 0$ für alle $x \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.

Aufgabe 22:
Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Folgenden konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad a_n := \frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 + 4n + 16},$$
$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad b_n := \frac{2^{n+1} n^n (n+1)!}{2^n n! (n+1)^{n+1}},$$
$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad c_n := \frac{n \sin(\frac{1}{n+1})}{\sqrt{n+2}}.$$

Checklist

Hier sind einige Fragen zum bisherigen Vorlesungsstoff gesammelt, die Sie mit 'Ja' oder 'Nein' beantworten sollen. Überlegen Sie sich dabei jeweils, wie ein Beweis bzw. ein Gegenbeispiel aussehen sollte oder die Aussage aus der Vorlesung bekannt ist.

(a) Eine konvergente Folge ist beschränkt.

(b) Eine beschränkte Folge ist konvergent.

(c) Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt.

(d) Grenzwerte konvergenter Folgen sind nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt.

(e) Eine konvergente Folge ist immer eine Cauchy-Folge.

(f) Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ vollständig ist, muss jede Cauchy-Folge mit Werten in $\mathbb{Q}$ gegen einen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ konvergieren.

(g) Eine Reihe konvergiert genau dann, wenn sie absolut konvergiert.

(h) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ konvergiert.

(i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$ konvergiert.

(j) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+k}$ konvergiert.

(k) Eine Folge hat stets einen Häufungspunkt.

(l) Man kann eine absolut konvergente Reihe beliebig umordnen, und sie wird immer gegen denselben Grenzwert konvergieren.

(m) Jede nach oben beschränkte, monoton fallend e Folge konvergiert.

(n) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(o) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^n$, aber nicht $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(p) In $\mathbb{C}$ besitzt jede Gleichung der Form $p_n(z) = 0$, wobei $p_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, stets n paarweise verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$.

(q) Jede stetige Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimmt auf $\mathbb{R}$ ihr Maximum an.

(r) Ist eine Funktion in einem Punkt differenzierbar, so ist sie dort stetig.

(s) Verschwindet die Ableitung einer differenzierbaren Funktion an einem Punkt, so besitzt sie in diesem Punkt ein lokales Extremum.

(t) Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit $2\,\mathrm{i}$ entspricht geometrisch der Streckung von z um den Faktor 2 und der Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn.