Analysis 1

24.01.2018

PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER

Übungsblatt 14

Aufgabe 1: Gammafunktion, Zetafunktion
Wir definieren für $x > 1$ die *Riemannsche Zeta-Funktion* durch

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Zeigen Sie, dass für $x > 1$ und $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ gilt

$$\frac{\Gamma(x)}{n^x} = \int_0^\infty e^{-nt} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

und folgern Sie daraus, dass

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t$$

gilt. Hierbei ist $\Gamma\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ die in der Vorlesung eingeführte Gammafunktion.

Aufgabe 2:
Sei $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad x \in (-1, 1).$$

Begründen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und bestimmen Sie mit Beweis einen geschlossenen Ausdruck für die n-te Ableitung der Funktion f, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom (i.e., $T_3[f; 0]$) von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \exp(x)\sin(x)$ in $a = 0$. Berechnen Sie hiermit mit Beweis die Zahl $e\sin(1)$ bis auf einen Fehler kleiner als $\frac{1}{2}$.

Einige Aufgaben zu Integralen

Bestimmen Sie die nachfolgenden bestimmten Integrale auf einem geeigneten Intervall, auf dem die Integranden jeweils definiert sind:

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}}\,\mathrm{d}x, \quad \int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+2}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-2}, \quad \int \frac{\log(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\arctan(x)}.$$