Analysis 1

17.01.2018

PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER

Übungsblatt 13

Bemerkung: Die Besprechung der Aufgabensammlung zur Analysis 1 findet am **19.01.2018** um **16:00 Uhr (s.t.)** im **Großen Hörsaal** in der Wegelerstraße 10 statt.

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass die nachfolgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie ihren Wert:

$$\text{(a)} \quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Betrachten Sie für (b) die Integrale $\int_0^1 (...)\,\mathrm{d}x$ und $\int_1^\infty (...)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$$

und zeigen Sie damit, dass

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}.$$

Wiederholen Sie hierbei für sich den binomischen Lehrsatz und zudem, wie sich $\sin^2$ über $\cos$ ausdrücken lässt.

Aufgabe 3:
Es sei $I := (a, b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Funktionen $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, d.h., für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $C_n > 0$ mit $|f_n(x)| \leq C_n$ für alle $x \in I$.

(a) Angenommen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f ebenfalls beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die punktweise Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ im Allgemeinen *nicht* ausreicht, um die Beschränktheit von f zu folgern.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie für die nachstehenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, ob sie punktweise gegen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvergieren und gegebenenfalls, ob diese Konvergenz gleichmäßig

(auf I) ist.

(a) $f_n(x) := \arctan(nx), \qquad x \in I := \mathbb{R},$

(b) $f_n(x) := \arctan(nx), \qquad x \in I := [0,1],$

(c) $f_n(x) := \begin{cases} n - n^2 x, & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \text{ oder } x = 0, \end{cases} \qquad x \in I := [0,1].$

(d) $f_n(x) := x \exp(-nx), \qquad x \in I := [0,\infty).$

Vergleichen Sie letztlich für (b), (c) und (d) die Werte

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei bei (b) und (c) $a = 0$, $b = 1$ und bei (d) $a = 0$ und $b = \infty$ ist. Diskutieren Sie unter Berücksichtigung entsprechender Ergebnisse aus der Vorlesung, wie diese Werte je für (a), (b) und (c) mit dem Konvergenzverhalten der Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Einklang stehen.