Analysis 1

16.11.2017
Prof. Dr. H. Koch
F. Gmeineder
Abgabe: 30.11.2017 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: ε-δ-Definition der Stetigkeit **2+3+2+3 = 10 Punkte**

Sei $0 < \alpha \leq 1$ und $-\infty < a < b < \infty$. Wir definieren

$$X_\alpha(a,b) := \Big\{ f\colon (a,b) \to \mathbb{R}\colon \sup_{\substack{x,y\in(a,b)\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \Big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Elemente von $X_\alpha(a,b)$ stetige Funktionen sind.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$$

gilt und folgern Sie, dass die Funktion $h\colon (0,1) \to (0,1)$ gegeben durch $h(x) := \sqrt{x}$ zu $X_{\frac{1}{2}}(0,1)$ gehört.

(c) Zeigen Sie, dass $X_\alpha(a,b) \subset X_\beta(a,b)$ falls $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$.

(d) Zeigen Sie, dass jedes Element von $X(a,b)$ zu einer stetigen Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann. Das heißt, zu jedem $f \in X_\alpha(a,b)$ gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

Aufgabe 2: Sätze über stetige Funktionen **5+5 = 10 Punkte**

Zeigen Sie,

(a) dass es keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt.

(b) dass jede stetige, nicht-konstante Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{<0} := \{x \in \mathbb{R}\colon\ x < 0\}$ mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

ein endliches Maximum besitzt.

Aufgabe 3: Punktmengen und stetige Funktionen **5+5= 10 Punkte**

Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq x$ für alle $x \in [a,b]$.

(a) Zeigen Sie: Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $[a,b]$, die zudem $f(x_n) \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, konvergiert.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie in Teilaufgabe (a). Zeigen Sie, dass ihr Limes x dann ein *Fixpunkt* von f ist, d.h., $f(x) = x$.

Aufgabe 4: **2.5+2.5+2.5+2.5= 10 Punkte**

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ jeweils den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} f_i(x).$$

Hierbei ist für $x > 0$

(a) $f_1(x) := xe^{-x}$

(b) $f_2(x) := x^{-1}e^{\frac{x^3}{1+x^2}}$

(c) $f_3(x) := f_1(x)f_2(x)$.

(d) $f_4(x) := (f_3(x))^x$.

Argumentieren Sie hierbei sorgfältig, wie Sie gegebenenfalls Rechenregeln für Potenzen und wo und wie Sie Stetigkeit etwaiger Funktionen verwenden.