Analysis 1

16.11.2017
Prof. Dr. H. Koch
F. Gmeineder
Abgabe: 23.11.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Punktmengen **5+5 = 10 Punkte**

Bestimmen Sie für jede der nachfolgenden Mengen A und B jeweils mit Beweis

- Supremum und Infimum,
- die Menge aller Häufungspunkte sowie
- die Menge aller Berührpunkte.

$$A := \left\{m + \frac{1}{n+1}\colon\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$B := \{n^2 - m^2 \colon n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 2: Summen und Produkte von Mengen **3+3+4 = 10 Punkte**

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}_+^* (:= \{x \in \mathbb{R}\colon\ x > 0\})$ nichtleere Mengen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Mengen

$$A + B := \{a + b\colon a \in A \text{ und } b \in B\},$$
$$A \cdot B := \{a \cdot b\colon a \in A \text{ und } b \in B\},$$
$$\lambda A := \{\lambda a\colon a \in A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

(b) $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Bestimmen Sie letztlich mit Beweis,

(c) wie sich $\sup(\lambda A)$ durch λ und $\sup(A)$ und $\inf(A)$ ausdrücken lässt.

Aufgabe 3: Grenzwerte von Funktionen **1+3+3+3 = 10 Punkte**

Zeigen Sie zuerst, dass für alle $x, y \geq 0$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$$

gilt. Wir definieren nun Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \quad g(x) := \frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}, \quad h(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

für $x \geq 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe des ersten Aufgabenteils, ob $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} g(x)$ und $\lim_{x\to\infty} h(x)$ existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

Aufgabe 4: Abbildungen **(1+1+2)+3+3= 10 Punkte**

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, für ein beliebiges Intervall $I = (a, b)$ mit $a < b$ eine bijektive Abbildung $\mathbb{R} \to (a, b)$ zu finden. Zeigen Sie hierzu,

(a) dass die Abbildung $f\colon x \mapsto \frac{1}{x}$ das Intervall $(1, \infty)$ bijektiv auf das Intervall $(0, 1)$ abbildet.

(b) dass die Abbildung $g\colon x \mapsto f(x + 1)$ das Intervall $(0, \infty)$ bijektiv auf das Intervall $(0, 1)$ abbildet.

(c) dass die Abbildung $j\colon x \mapsto (b - a)x + a$ das Intervall $(0, 1)$ bijektiv auf (a, b) abbildet.

Finden Sie sodann (basierend auf (b)) einen Kandidaten für eine bijektive Abbildung $\mathbb{R} \to (0, 1)$ und letztlich (basierend auf (c)) einen Kandidaten für eine bijektive Abbildung $\mathbb{R} \to (a, b)$. Beweisen Sie Ihre Vermutungen.
