Analysis 1

02.11.2017
PROF. DR. H. KOCH
F. GMEINEDER
ABGABE: 16.11.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Konvergenzkriterien für Reihen **2+2+2+2+2= 10 Punkte**

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Reihen, ob sie jeweils (absolut) konvergieren:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+3} \quad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+3}$$
$$\text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^n}{(3n^2+8n+1)^n} \quad \text{(v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Es seien $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ und

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N_1} p_k x^k \quad \text{und} \quad q(x) = \sum_{k=0}^{N_2} q_k x^k, \qquad x \in \mathbb{R},$$

zwei *Polynome* vom Grad N_1 bzw. N_2 gegeben; hierbei sind $p_0, ..., p_{N_1}, q_0, ..., q_{N_2}$ gegebene reelle Zahlen mit $p_{N_1}, q_{N_2} \neq 0$. Weiters existiere ein $M \in \mathbb{N}$ mit $q(x) \neq 0$ für alle $x \geq M$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Die Reihe $\sum_{n=M}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ konvergiert.
- Die Reihe $\sum_{n=M}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ konvergiert absolut.
- Es gilt $N_1 + 2 \leq N_2$.

Aufgabe 3: **4+2+4 = 10 Punkte**

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein $\theta > 1$ und ein $N \geq 2$, so dass

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq 1 - \frac{\theta}{n} \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(b) Vergleichen Sie diese Aussage mit dem Quotientenkriterium. Was stellen Sie fest?

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

bitte wenden ;) $\longrightarrow$

Aufgabe 4: Cauchy-Produkt von Reihen **4+2+4=10 Punkte**

Zeigen Sie,

(a) dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

(b) dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

absolut konvergiert.

(c) dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität

$$2C(x)^2 = C(2x) + 1$$

gilt.