Analysis 1

02.11.2017
Prof. Dr. H. Koch
F. Gmeineder
Abgabe: 09.11.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: Rechenregeln für Grenzwerte **(2+2+3)+3 = 10 Punkte**

In dieser Aufgabe dürfen Sie die in der Vorlesung bewiesenen Rechenregeln für Grenzwerte benutzen.

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 2n^3}{4n^3 - 1} \quad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^2}{n^3 + 2^{n+1}} \quad \text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

(b) Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \begin{cases} (-1)^n \frac{1}{n} + 1 & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ 2 + \frac{n}{n+1} & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ 2 & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Finden Sie mit Beweis sämtliche Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2: Teilfolgen **8+2 = 10 Punkte**

Zeigen Sie, dass eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt. Vergleichen Sie diese Aussage mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe 3: Monotone Konvergenz **10 Punkte**

Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_0 := \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist. Schlussfolgern Sie daraus die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4: g-adische Brüche **6 + 4 = 10 Punkte**

Wir nennen einen g-adischen Bruch $a_{-k}...a_0.a_1a_2...$ *periodisch*, falls natürliche Zahlen $r, s \geq 1$ existieren mit

$$a_{n+s} = a_n \qquad \text{für alle } n \geq r.$$

(a) Zeigen Sie, dass ein g-adischer Bruch genau dann periodisch ist, wenn er eine rationale Zahl darstellt.

(b) Zeigen Sie, dass durch den periodischen g-adischen Bruch 0.99999... die Zahl 1 dargestellt wird.
