Analysis 1

12.10.2017
PROF. DR. H. KOCH
F. GMEINEDER
ABGABE: 26.10.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: Vollständige Induktion **2+2+3+3+(3)=10+(3) Punkte**

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^n < n! \tag{1}$$

gilt. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie zuerst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$2^{n-1} \leq n!$$

gilt.

(b) Zeigen Sie in einem zweiten Schritt, dass für alle $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

gilt.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Satzes und unter Verwendung der Teilaufgaben (a) und (b), dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4$$

gilt.

(d) Zeigen Sie nun unter Verwendung von Teilaufgabe (c) die Ungleichung (1) durch vollständige Induktion.

Bonusaufgabe: Können Sie in Ungleichung (1) 4 durch 3 ersetzen? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 2: Rechenregeln für Brüche **5+5=10 Punkte**

In der Vorlesung wurde für einen allgemeinen Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ gezeigt, dass die Gleichung $ax = b$ für $a \neq 0$ eine eindeutige Lösung hat. Diese wird mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet. Zeigen Sie anhand dieser Definition und den Körperaxiomen, dass die folgenden Rechenregeln für Brüche gelten:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ mit $b \neq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Aufgabe 3: Ungleichungen **5+5=10 Punkte**

Betrachten Sie die Mengen

$$\begin{aligned} M &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| + |y| \leq 2\}, \\ N &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leq y^2 - 2x + 1 \leq 2\}, \\ O &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leq y^2 - x^2 - 2x - 1 \leq 2\}. \end{aligned}$$

Stellen Sie die Mengen jeweils in einem kartesischen Koordinatensystem dar und begründen Sie Ihre Skizzen kurz.

Aufgabe 4: Körper- und Anordnungsaxiome **5+5=10 Punkte**

Zeigen Sie unter Rückführung auf die Körper- und Anordnungsaxiome der reellen Zahlen, dass die folgenden Mengen leer sind:

(a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \colon\ x^2 + 3 \leq 1\}$.

(b) $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \colon\ -x^2 + 2x - |x| \geq 2\}$.

Bemerkung: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper.