Analysis 1

10.01.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 17.01.2018 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 12

Aufgabe 1: **4+4+2 = 10 Punkte**

Sei $-\infty < a < b < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist und insbesondere, dass gilt

$$\int_a^b \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(b) - \exp(a).$$

Arbeiten Sie hier direkt mit Ober- und Untersummen.

(b) Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend mit $f(0) = 1$ und mit Umkehrfunktion f^{-1}. Bestimmen Sie mit Beweis einen Ausdruck für $\int_1^x f^{-1}(t)\,dt$ in Abhängigkeit einer Stammfunktion[1] von f, wobei $x \in f([0,\infty)) := \{f(y)\colon\ y \in [0,\infty)\}$. Arbeiten Sie auch hier an der Definition des Riemann-Integrals.

Hinweis: Erstellen Sie eine Skizze.

(c) Folgern Sie direkt aus (a) und (b), dass $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) = x\log(x) - x$ eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2: **4+6 = 10 Punkte**

Es sei $-\infty < a < b < \infty$.

(a) Es sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine konvexe Funktion, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und seien $a_1, ..., a_n \in [0,1]$ mit $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ gegebene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass für alle $b_1, ..., b_n \in [0,\infty)$ gilt

$$f\left(\sum_{k=1}^n b_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^n f(b_k) a_k.$$

(b) Es sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine surjektive, konvexe Funktion und $g\colon [a,b] \to [0,\infty)$ Riemann-integrierbar.

Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ g$ Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ ist und gilt

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g\,\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \circ g\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3: **10 Punkte**

---

[1] Dieser Begriff wird formal in der Vorlesung vom 15. Januar 2018 eingeführt werden.

Sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass für alle differenzierbaren Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f'(z)|^p \,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{für alle } x, y \in [a,b].$$

Hinweis: Verwenden Sie hierzu die vorausgegangene Aufgabe.

Aufgabe 4: **4+2+2+2 = 10 Punkte**

Bestimmen Sie die nachfolgenden Stammfunktionen:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x}, \quad \text{(b)} \quad \int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{(c)} \int \cos(x)\exp(\sin(x))\,\mathrm{d}x, \quad \text{(d)} \quad \int \frac{\cos(\log(x))}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis zu (a). Finden Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{ax+b}{x^2+1}.$$