Analysis 1

30.11.2017
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
ABGABE: 11.01.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: **3+3+4 = 10 Punkte**

Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es existiere der Grenzwert $a := \lim_{x\to\infty} f'(x)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $\lim_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x)) = a$.

(b) Ist f beschränkt, so ist $a = 0$.

(c) Ist $a = 0$ und f beschränkt, so existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Aufgabe 2: Konvexität **5+5 = 10 Punkte**

Es sei $I := (c,d)$ mit $-\infty < c < d < \infty$ ein offenes Intervall.

(a) Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn für alle $x, y \in I$ gilt $f((x+y)/2) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass für alle $a < x < b$ gilt

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

und folgern Sie daraus, dass jede konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Bemerkung: Beachten Sie, dass bei (b) die Funktion f *nicht* als differenzierbar angenommen wird.

Aufgabe 3: Regeln von L'Hospital **2.5+2.5+2.5+2.5 = 10 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Limiten, sofern diese existieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2}{1-\cos(x)}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\tan(x)}, \quad \lim_{x\to\infty} (1+x)^{-\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Aufgabe 4: **5+3+2 = 10 Punkte**

Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$ für $x > 0$, wobei log den natürlichen Logarithmus bezeichne.

(a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f sowie die Limiten $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\searrow 0} f(x)$.

(b) Bestimmen Sie aus (a) aufbauend, welche der Zahlen 2^e oder e^2 größer ist.

(c) Bearbeiten Sie (b) für die Zahlen 2^π und π^2.

Wir wünschen Ihnen allen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2018!
