Analysis 1

16.11.2017
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
ABGABE: 21.12.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: **(2+2+2)+4 = 10 Punkte**

Bestimmen Sie

(a) die Ableitungen der folgenden Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, 3$):

$$f_1(x) = \exp(x \sin(x))$$
$$f_2(x) = \sqrt{e^{-x^2}}$$
$$f_3(x) = \tanh(x).$$

(b) mittels der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion die Ableitung des Area Tangens Hyperbolicus (d.h., die Ableitung der Umkehrfunktion des auf dem Übungsblatt 9 eingeführten Tangens hyperbolicus).

Hinweis: Wie können Sie die Ableitung des Tangens hyperbolicus durch den Tangens hyperbolicus ausdrücken?

Erläutern Sie dabei jeweils kurz, warum die angegebenen Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Es sei $f\colon [0,1] \to (0,\infty)$ eine stetige Funktion, die auf $(0,1)$ differenzierbar ist und überdies $f(0) = 1$ sowie $f(1) = e$ (wobei $e := \exp(1)$ die Eulersche Zahl ist) erfüllt. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in (0,1)$ mit $f(\xi) = f'(\xi)$ existiert.

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $-\infty < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n < \infty$. Bestimmen Sie mit Beweis die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{a_1, ..., a_n\} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - a_k}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, ..., a_n\}$$

gegeben ist. Fertigen Sie hierzu eine Skizze des Graphen von f an.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Es seien $-\infty < a < b < \infty$ und $I = (a,b)$ ein Intervall. Weiters sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Es besitze f mindestens $(n+1)$ Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt). Zeigen Sie, dass $f^{(n)}$ eine Nullstelle besitzt.