Analysis 1

16.11.2017

Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder

Tutoriumsblatt 8

Aufgabe 1: Additionstheoreme

In der Vorlesung haben Sie die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus kennen gelernt.

(a) Beweisen Sie, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

Arbeiten Sie dabei mit der Restgliedabschätzung der Sinusreihe.

(b) Leiten Sie direkt, und ohne auf den entsprechenden Satz in der Vorlesung zu verweisen, das Beziehung

$$\sin(x)=2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}),\qquad x\in\mathbb{R},$$

her, indem Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel geeignet auf die Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion reduzieren.

(c) Iterieren Sie die Beziehung aus (b) und zeigen Sie auf (a) aufbauend

$$\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}\cos\big(\frac{x}{2^j}\big):=\lim_{k\to\infty}\Big(\cos(x)\cdot\dots\cdot\cos\big(\frac{x}{2^{k-1}}\big)\cos\big(\frac{x}{2^k}\big)\Big),\qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Aufgabe 2: Einheitskreis und Approximation durch Polygone

Zeigen Sie,

(a) dass sich jede komplexe Zahl $z\in\mathbb{C}$ in der Form $z=re^{\mathrm{i}\,\varphi}$ schreiben lässt, wobei $r\geq 0$ und $\varphi\in[0,2\pi)$. Was bedeutet dies geometrisch?

(b) dass für $k\in\mathbb{N}$ die k-ten Einheitswurzeln (d.h., die Lösungen der Gleichung $z^k=1$) genau durch $e_j:=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2j\pi}{k}}$ gegeben sind, $j=0,...,k-1$.

(c) dass für jedes $j\in\{0,...,n-1\}$ je zwei aufeinanderfolgende Einheitswurzeln denselben Abstand haben. Zeigen Sie dafür, dass $|e_j-e_{j-1}|=2\sin(\pi/k)$. Begründen Sie damit, dass die Einheitswurzeln die Ecken eines regulären k-ecks bilden.

(d) Sei ℓ_k die Länge des k-Ecks aus Aufgabe (c). Bestimmen Sie $\lim_{k\to\infty}\ell_k$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis elementargeometrisch.