

Analysis 1

15.11.2017

PROF. DR. H. KOCH

F. GMEINER



Tutorium 6

Aufgabe 1: Rechnen in \mathbb{C}

Wiederholen Sie zunächst,

- (i) wie sich Addition und Multiplikation komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene graphisch interpretieren lassen.
- (i') wie die Konjugation komplexer Zahlen definiert ist und wie sie sich in der Gaußebene graphisch interpretieren lässt.
- (ii) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = a + ib$:

$$(2 + 3i) \cdot (3 - 4i), \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad (3+5i) \cdot \frac{2}{2-i}$$

- (iii) Nach Teilaufgabe (i) und Vorlesung definiert die Multiplikation einer komplexen Zahl mit i (d.h., die Abbildung $z \mapsto iz$) eine Drehung in der Gaußschen Zahlenebene. Bestimmen Sie, um welche Drehung es sich hierbei handelt und ermitteln Sie hiermit den Wert von i^{2017} .

Aufgabe 2: Betrag einer komplexen Zahl

In dieser Aufgabe wollen wir den Betrag von komplexen Zahlen näher untersuchen.

- Wiederholen Sie die Definition des Betrages einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$. Was bedeutet der Betrag geometrisch?
- Das folgende 'Argument' ist höchst fehlerhaft. Diskutieren, was falsch ist: Sei $z = 1 + i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{1^2 + i^2} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0$.
- Zeigen Sie die *Dreiecksungleichung*: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Aufgabe 3: Gleichungen in \mathbb{C}

Zeigen Sie, dass jedes quadratische Polynom $q(z) := az^2 + bz + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4: Gleichungen in \mathbb{C}

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$ (z.B., indem Sie den Realteil und Imaginärteil gesondert betrachten). Bestimmen Sie sodann alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

- (i) $z^4 = 1$,
- (ii) $z^6 = 1$,
- (iii) $z^8 = 1$.