Analysis 1

15.11.2017
Prof. Dr. H. Koch
F Gmeineder

universitätbonn

Tutorium 5

Aufgabe 1: Häufungspunkte, Berührpunkte
Wiederholen Sie zunächst

- die Definition eines Berührpunktes einer nichtleeren Menge $A \subset \mathbb{R}$,
- die Definition eines Häufungspunktes einer nichtleeren Menge $A \subset \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie sodann die Menge der Berührpunkte sowie die der Häufungspunkte für die Mengen

$$A := \{(-1)^n \frac{n}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad B := (0,1] \cup \{2\}.$$

Aufgabe 2: Supremum und Infimum
Wiederholen Sie zunächst,

- die Definitionen von Suprema und Infima nichtleerer Mengen $A \subset \mathbb{R}$.
- wann ein Supremum ein Maximum und wann ein Infimum ein Minimum genannt wird.

Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer mit $-\infty < \inf(A) \le \sup(A) < \infty$. Bestimmen Sie nun - je nach Gruppe - entweder (a) das Supremum oder (b) das Infimum der Menge

$$A^2 := \{a^2 : \ a \in A\}.$$

(a) Gilt $A^2 = A \cdot A$, wobei $A \cdot A$ das im Übungsblatt eingeführte Minkowski-Produkt von Mengen ist?

(b) Geben Sie Beispiele nichtleerer Mengen $A \subset \mathbb{R}$, sodass $\sup(A^2) = \max(A^2)$.

Aufgabe 3:
Wiederholen Sie zunächst

- die Definitionen des Limes superior und inferior für Folgen.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Zeigen Sie - je nach Gruppe - dass

(a) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup(H)$,

(b) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf(H)$.

Was bedeuten also Limes superior und inferior anschaulich? Bestimmen Sie sodann $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ für diese Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_n = (-1)^n, \quad a_n = (-2)^n, \quad a_n = (-1)^n \frac{2n}{2n+1}.$$

Aufgabe 4: Stetigkeit
Wiederholen Sie,

- was es für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bedeutet, stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$ zu sein.
- was es für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bedeutet, stetig zu sein,
- welche Beispiele stetiger und unstetiger Funktionen Sie bereits kennen.

Zeigen Sie sodann, dass die Exponentialfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\}$ bijektiv ist.