Analysis 1

15.11.2017
PROF. DR. H. KOCH
F. GMEINEDER

universitätbonn

Tutorium 4

Aufgabe 1: Reihenkonvergenz
Wiederholen Sie zunächst,

- was die Konvergenz von Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bedeutet.
- welche Konvergenz/Divergenzkriterien für Reihen Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben.

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit Werten in $\mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie entweder einen Beweis/Verweis auf die Vorlesung oder ein Gegenbeispiel an.

(i) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(ii) Konvergieren $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jeweils absolut, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

(iii) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$.

(iv) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$ absolut, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(v) Die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+|a_n|}$$
konvergiert absolut.

(vi) Die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|a_n|}$$
konvergiert absolut.

Aufgabe 2: Konvergenzkriterien für Reihen
Bestimmen Sie mit Beweis, ob die nachfolgenden Reihen konvergieren:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^n)^2}{n^{n^2}} \quad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \text{(iii)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1-n}{n^2-1} \quad \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} (\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1) \quad \text{(v)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{5n+6n^2}\right)^{3n}.$$

Aufgabe 3: Umordnung von Reihen
Beurteilen Sie das nachfolgende 'Argument': *Die Reihe $s := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Es gilt*

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} + \ldots,$$

also muss $s > \frac{1}{2}$ gelten. Wir betrachten nun diejenige Umordnung der Reihe, bei der auf je ein positives zwei negative Folgeglieder folgen:

$$s = (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} \pm ... = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \pm ... = \frac{1}{2}s.$$

Also muss $s = 0$ gelten, und wegen $s > \frac{1}{2}$...???
Diskutieren Sie, wo der/die Fehler in dieser 'Argumentation' liegen.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ wiederum abzählbar ist.