Analysis 1

02.11.2017

PROF. DR. H. KOCH
F. GMEINEDER

Tutorium 3

Aufgabe 1: Monotone Konvergenz

Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 2: Kettenbruchdarstellung von $\sqrt{2}$

In dieser Aufgabe wollen wir die Kettenbruchdarstellung von $\sqrt{2}$ herleiten. Hierbei nennen wir einen unendlichen Bruch der Form

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{1+\dots}}} \tag{2.1}$$

einen *Kettenbruch*. Um $\sqrt{2}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln, schreiben wir schreiben zuerst

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2}-1) \\ &\overset{(a)}{=} 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} \overset{(b)}{=} 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = (*).\end{aligned}$$

(a) Begründen Sie die Schritte (a) und (b).

(b) Wenden Sie das dargestellte Argument auf den Nenner des in $(*)$ auftretenden Bruchs an und iterieren Sie. Wenn Sie Ergebnis in der Form (2.1) darstellen, welche Koeffizienten a_n ergeben sich für $n \in \mathbb{N}$?

(c) In der Situation von (b) schreiben wir auch $[a_0; a_1, a_2, ...]$ für den in (2.1) angegebenen Kettenbruch. Brechen wir diesen unendlichen Kettenbruch an einem $n \in \mathbb{N}$ ab, so entsteht ein endlicher Kettenbruch, den wir demnach mit $[a_0; a_1, ..., a_n]$ notieren. Wir können also

$$[a_0; a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

schreiben, wobei $p_n \in \mathbb{Z}$ und $q_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ teilerfremd sind. Offenbar gilt

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0a_1a_2+a_2+a_0}{a_1a_2+1}.$$

(i) Prüfen Sie die angegebenen Identitäten für $\frac{p_i}{q_i}$, $i = 0, 1, 2$ nach.

(ii) Es seien $p_{-1} := 1$, $p_{-2} := 0$, $q_{-1} := 0$ und $q_{-2} := 1$. Zeigen Sie (z.B. mit vollständiger Induktion), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_np_{n-1} - p_nq_{n-1} = (-1)^n.$$

(iii) Folgern Sie aus der letzten dieser Identitäten, dass der Satz über die monotone Konvergenz nicht direkt auf die Folge $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ anwendbar ist.

(d) Zeigen Sie, dass jedoch die Folgen $(\frac{p_{2n}}{q_{2n}})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen der monotonen Konvergenz erfüllen und somit jeweils konvergieren.

(e) In der Situation von (d) seien α bzw. β die Limiten der geraden bzw. ungeraden Folgeglieder, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \beta.$$

Zeigen Sie, dass $\alpha = \beta$ und verifizieren Sie, dass $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.