Analysis 1

23.10.2017

Prof. Dr. H. Koch
F. Gmeineder

Tutorium 2

Aufgabe 1: Tutorium–Ungleichungen und Mengen

Skizzieren die folgenden Mengen in einem kartesischen Koordinatensystem dar und begründen Sie Ihre Skizze:

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \max\{|x|,|y|\} \leq 2\},$$
$$N := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2y^2 \leq x \leq 1\},$$
$$O := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 - 2y^2 \leq 2\}.$$

Aufgabe 2: Tutorium–Ungleichungen, Anordnungsaxiome

Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichungskette für alle $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ gilt:

$$1 + x \leq \frac{1}{1-x} \leq 1 + 2x.$$

Interpretieren Sie diese Ungleichungskette zudem graphisch mit Hilfe einer Skizze.

Aufgabe 3: Tutorium–Konvergenz von Folgen

Sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper. Wir wollen nun diskutieren, was der Begriff der Konvergenz bedeutet und was nicht. Diskutieren Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie äquivalent zu der in der Vorlesung definierten Aussage '$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert*' sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung entweder durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel. Diskutieren Sie weiters, wie die Aussagen zusammenhängen, i.e., ob zum Beispiel (a) (b) impliziert, etc.

(a) Für alle $a \in \mathbb{K}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ für welches es wiederum ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$.

(b) Es existiert ein $a \in \mathbb{K}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, für welches es wiederum ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$.

(c) Es existiert ein $a \in \mathbb{K}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq N$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

(d) Es existiert ein $a \in \mathbb{K}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

(e) Es existiert kein $a \in \mathbb{K}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ existiert mit $|a_n - a| > \varepsilon$.

Aufgabe 4: Tutorium–Konvergenz von Folgen

Zeigen Sie direkt anhand der in der Vorlesung gegebenen Definition der Konvergenz von Folgen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wobei

$$a_n := \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

und bestimmen Sie den Grenzwert.