

# Analysis 1

15.01.2018

PROF. DR. H. KOCH

DR. F. GMEINER



---

## Tutoriumsblatt 12

---

### Aufgabe 1: Folgenkonvergenz

Sei  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}$  gegeben durch

$$f_n(x) := \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad x \in [0, 1].$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen eine Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert und bestimmen Sie dieses  $f$ .
- (b) Ist die Konvergenz sogar gleichmäßig?

### Aufgabe 2: Uneigentliche Integrale, Integralvergleichskriterium

Bestimmen Sie, für welche  $\alpha, \beta > 0$  das folgende uneigentliche Integral existiert:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \log^\beta(x)}.$$

Untersuchen Sie damit, ob die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\log(4k+1)} - \frac{1}{\log(4k+3)} \right)$$

absolut konvergiert.

### Aufgabe 3: Flächenberechnungen und uneigentliche Integrale

Sei  $k > 0$  und setze

$$f_k(x) := \frac{x}{k + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Im Folgenden dürfen Sie den Begriff des Flächeninhalts wie aus der Schule bekannt voraussetzen.

- (a) Für jedes  $k > 0$  begrenzt der Graph von  $f_k$  mit der  $x$ -Achse im ersten Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems ein sich ins Unendliche erstreckende Flächenstück. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück keinen endlichen Flächeninhalt besitzt.
- (b) Sei nun  $0 < k < l < \infty$ . Dann begrenzen die Graphen von  $f_k$  und  $f_l$  im ersten Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems ein Flächenstück. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück einen endlichen Inhalt besitzt und geben Sie diesen an.