Analysis 1

12.10.2017

PROF. DR. H. KOCH
F. GMEINEDER

Tutorium 1

Aufgabe 1: Tutorium–Peano-Axiome

Wie in der Vorlesung nennen wir ein Tupel (M, S) bestehend aus einer Menge M und einer Abbildung $S\colon M \to M$, welche die Peano–Axiome erfüllen, ein *Modell der natürlichen Zahlen.*
Zeigen oder widerlegen Sie, ob die folgende Tupel (M, S) Modelle der natürlichen Zahlen darstellen (falls nicht, so machen Sie bitte klar, welche Axiome verletzt sind):

(a) $M = \mathbb{Z}$ und $S(x) = x + 1$ für $x \in \mathbb{Z}$.

(b) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (die Potenzmenge von $\mathbb{N}$) und $S(A) = \{a + 1 : a \in A\}$.

Aufgabe 2: Tutorium–Vollständige Induktion 1

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass mit einer fehlerhaften Anwendung des Induktionsprinzips widersprüchliche Aussagen folgen. Zeigen Sie auf, wo der Fehler liegt.

- Wir wollen nun zeigen, das alle Studenten der Analysis 1–Vorlesung denselben Namen haben. Dies beweisen wir mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl $n \in \mathbb{N}$ der Studenten. Für den Induktionsanfang $n = 1$ bemerken wir, dass ein(e) Student(in) trivialerweise wie sie/er selbst heißt. Nun gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$, und wir wollen daraus die Aussage für $(n + 1)$ Studenten folgern. Hierzu seien $(n + 1)$ Studenten gegeben, die wir mit $a_1, ..., a_{n+1}$ durchnummerieren. Wir betrachten nun die Studenten $a_1, ..., a_n$. Da dies n–Studenten sind, haben sie nach Induktionsvoraussetzung alle denselben Namen. Auf der anderen Seite sind $a_2, ..., a_{n+1}$ ebenfalls n–Studenten, die nach Induktionsvoraussetzung denselben Namen haben. Da aber $a_2, ..., a_n$ in beiden Gruppen enthalten sind und alle denselben Namen haben, müssen also auch a_1 sowie a_{n+1} diesen Namen haben. Damit folgt nach dem Induktionsprinzip, dass alle Studenten gleich heißen - *wo ist der Fehler?*

Aufgabe 3: Tutorium–Vollständige Induktion 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n+4}.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{n! - 1}{n!}.$$

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist

$$11^{n+1} + 12^{2n-1} \text{ durch 133 teilbar.}$$

(f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann die Ebene (i.e., $\mathbb{R}^2$) durch n Geraden höchstens in $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ disjunkte Gebiete zerlegt werden (in dem Sinne, dass z.B. eine Gerade die Ebene in zwei disjunkte Gebiete zerlegt).

Aufgabe 4: Tutorium–Äquivalenzrelationen

In dieser Aufgabe wollen wir die ganzen Zahlen über Äquivalenzrelationen einführen. Hierzu definieren wir auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Relation '$\sim$' durch

$$(n, m) \sim (n', m') \quad \text{genau dann, wenn} \quad n + m' = n' + m.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei '$\sim$' tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Für $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei nun

$$[(n, m)] := \{(n', m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon \ (n, m) \sim (n', m')\}$$

die Äquivalenzklasse von (n, m). Wir definieren nun

$$\widetilde{\mathbb{Z}} := \{[(n, m)] \colon \ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

(b) Stellen Sie $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ graphisch als Gitter dar und kennzeichnen Sie darin die Äquivalenzklassen.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\widetilde{\oplus} \colon \widetilde{\mathbb{Z}} \times \widetilde{\mathbb{Z}} \to \widetilde{\mathbb{Z}}$ gegeben durch

$$[(a, b)] \widetilde{\oplus} [(c, d)] = [(a + c, b + d)], \qquad a, b, c, d \in \mathbb{N},$$

wohldefiniert ist. Zeigen Sie ferner, dass $\widetilde{\oplus}$ assoziativ ist, d.h.,

$$[(a, b)] \widetilde{\oplus} ([(c, d)] \widetilde{\oplus} [(e, f)]) = ([(a, b)] \widetilde{\oplus} [(c, d)]) \widetilde{\oplus} [(e, f)], \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}.$$

(d) Finden Sie das (bzlg. '$\widetilde{\oplus}$') *neutrale Element* $[(\alpha, \beta)] \in \widetilde{\mathbb{Z}}$ (d.h., dasjenige Element, welches

$$[(\alpha, \beta)] \widetilde{\oplus} [(a, b)] = [(a, b)]$$

für alle $a, b \in \mathbb{N}$ erfüllt).

(e) Sei $[(a, b)] \in \widetilde{\mathbb{Z}}$ gegeben. Finden Sie das (bzgl. '$\widetilde{\oplus}$') *inverse Element* $[(c, d)] \in \widetilde{\mathbb{Z}}$ (d.h., dasjenige Element, welches

$$[(a, b)] \widetilde{\oplus} [(c, d)] = [(\alpha, \beta)]$$

erfüllt, wobei $[(\alpha, \beta)]$ das neutrale Element der Teilaufgabe (d) ist).

(f) Zeigen Sie, dass $\{[(1, 0)], [(0, 1)]\}$ $\widetilde{\mathbb{Z}}$ erzeugt, d.h., für jedes $[(a, b)] \in \widetilde{\mathbb{Z}}$ gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$\underbrace{[(1, 0)] \widetilde{\oplus} ... [(1, 0)]}_{n\text{-mal}} \widetilde{\oplus} \underbrace{[(0, 1)] \widetilde{\oplus} ... [(0, 1)]}_{m\text{-mal}} = [(a, b)].$$

Gilt das auch für $\{[(3, 1)], [(1, 3)]\}$?