Analysis 1

15.01.2018

PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER

universitätbonn

Tutoriumsblatt 12

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie zu die nachfolgenden Integrale / Stammfunktionen:

$$\int \frac{\log(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos^2(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^{2a} \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Hinweis zum zweiten Integral: Drücken Sie $\sin(2x)$ durch $\sin(x)$ und $\cos(x)$ aus.

Aufgabe 2:
Es sei $-\infty < a < b < \infty$ und

$$C([a,b]) := \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\colon\ f \text{ stetig}\},$$
$$C_0^1([a,b]) := \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}\colon\ f(a) = f(b) = 0,\ f' \text{ ist gleichmäßig stetig auf } [a,b]\}.$$

(a) Sei nun $f \in C([a,b])$ mit

$$\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } g \in C_0^1([a,b]).$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist und bestimmen Sie den Wert dieser Konstante in Abhängigkeit eines geeigneten Integrales von f.
(b) Angenommen, es gilt

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } g \in C_0^1([a,b]).$$

Zeigen Sie, dass dann f ebenfalls konstant ist und bestimmen Sie den Wert dieser Konstante.

Aufgabe 3:
Sei $0 \leq a < b < \infty$ und $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion.

(a) Leiten Sie mit Hilfe eines Grenzprozesses und unter Verwendung geeigneter Summen die Formel

$$V = \pi \int_a^b |f|^2\,\mathrm{d}x$$

für das Volumen desjenigen Körpers her, der durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht.

(b) Das (aus der Schule bekannte) *Cavalierische Prinzip* besagt, dass

$$V = \int_a^b V_2(K_t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei $V_2(K_t)$ der Flächeninhalt der durch $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq f^2(t)\}$ definierten Fläche im $\mathbb{R}^2$ ist. Was beduetet dies anschaulich? Zeigen Sie, dass das Cavalierische Prinzip denselben Ausdruck für V wie aus (a) liefert.

(c) Berechnen Sie damit das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$.