Analysis 1

08.01.2018

PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER

Tutoriumsblatt 11

Aufgabe 1:

Sei $0 \leq a < b < \infty$. Begründen Sie, warum $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^2$ Riemann-integrierbar ist. Berechnen Sie sodann mit Hilfe von Ober- und Untersummen den Wert des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung: Hierbei können Ihnen möglicherweise die Potenzsummen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ und } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

behilflich sein.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie mittels Ober- und Untersummen, dass für alle $b > 1$ gilt

$$\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log(b),$$

wobei log den natürlichen Logarithmus bezeichne. Arbeiten Sie hierbei mit den Zerlegungen

$$\tau_N = \{N, (b^{\frac{k}{N}})_{k=0,\ldots,N}\}.$$

Zusatz. Überlegen Sie sich *ohne die zu zeigende Formel zu verwenden*, dass die Funktion

$$L\colon b \mapsto \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion erfüllt.