Analysis 1
23.10.2017
Prof. Dr. H. Koch
F. Gmeineder

Tutorium 1–Zusatz: Lösung[1]

Aufgabe 1: Tutorium 1–Induktion
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Induktionsanfang: $n = 1$. Hier rechnen wir

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{(3-2)(3+1)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 1},$$

und somit stimmt der Induktionsanfang.
Es gelte nun die *Induktionsvoraussetzung*, d.h., es gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Für den *Induktionsschritt* '$n \curvearrowright n+1$' rechnen wir (unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung an der Stelle 'IV')

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} &= \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\Big) + \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} \\
&= \frac{1}{3n+1} \cdot \frac{n(3n+4)+1}{3n+4} = \frac{n+1}{3n+4} = \frac{(n+1)}{3(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass

$$n(3n+4)+1 = 3n^2+4n+1 = (3n+1)(n+1) = 3n^2+3n+n+1$$

gilt. Damit folgt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ nach dem Induktionsprinzip. ■

Aufgabe 2: Tutorium 1–Rationale Zahlen, Äquivalenzklassen
Wir definieren auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ eine Relation '$\sim$' durch

$$(p, q) \sim (p', q') :\Leftrightarrow pq' = p'q.$$

[1] Falls Sie Fehler oder Typos entdecken, so bin ich um eine E-Mail an `fgmeined@math.uni-bonn.de` dankbar.

(a) Zeigen Sie, dass durch '$\sim$' eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gegeben ist.

(b) Wir definieren nun $\widetilde{\mathbb{Q}}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. '$\sim$'. Erläutern Sie, wie diese Definition mit den aus der Schule bekannten rationalen Zahlen zusammenhängt (gehen Sie insbesondere auf die Bedeutung der Äquivalenzklassen ein).

(c) Auf (b) aufbauend, definieren Sie eine Operation $\widetilde{\oplus}\colon \widetilde{\mathbb{Q}} \times \widetilde{\mathbb{Q}} \to \widetilde{\mathbb{Q}}$' auf $\widetilde{\mathbb{Q}}$, die der aus der Schule bekannten Addition rationaler Zahlen entspricht.

Zeigen Sie direkt anhand Ihrer Definition, dass Operation wohldefiniert ist.

(d) Bearbeiten Sie (c) für die Multiplikation rationaler Zahlen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2: (a) Offensichtlich ist durch '$\sim$' eine Relation gegeben. Wir zeigen nun, dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Zur Reflexivität. Sei $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ beliebig. Dann gilt $p \cdot q = p \cdot q$, und das bedeutet gerade, dass $(p, q) \sim (p, q)$. Also ist '$\sim$' reflexiv.

Zur Symmetrie: Seien $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ mit $(p, q) \sim (p', q')$, d.h., $pq' = p'q$ und somit $p'q = pq'$. Das bedeutet aber gerade, dass $(p', q') \sim (p, q)$. Also ist '$\sim$' symmetrisch.

Zur Transitivität: Seien $(p, q), (p', q'), (p'', q'') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ mit $(p, q) \sim (p', q')$ und $(p', q') \sim (p'', q'')$. Wir müssen zeigen, dass dann auch $(p, q) \sim (p'', q'')$ gilt. Zuerst gilt wegen $(p, q) \sim (p', q')$ auch

$$pq' = p'q.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung auf beiden Seiten mit $q'' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wir nutzen nun die Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ (das ist hier eigentlich nicht verlangt, und es ist nicht schlimm, wenn Sie diesen Schritt auslassen) um daraus sukzessive

$$\begin{aligned} pq' = p'q &\Rightarrow pq'q'' = p'qq'' \\ &\Rightarrow pq'q'' = p''q'q \quad (\text{da } (p', q') \sim (p'', q'')) \\ &\Rightarrow pq''q' - p''qq' = 0 \\ &\Rightarrow q'(pq'' - p''q) = 0. \end{aligned}$$

Da $q' \neq 0$, folgt aus der letzten Zeile, dass $(pq'' - p''q) = 0$ sein muss, und das bedeutet gerade $(p, q) \sim (p'', q'')$.

Beachten Sie hier, dass Sie nicht mit Brüchen und deren Rechenregeln argumentieren dürfen, da diese uns in dieser nicht zur Verfügung stehen – wir konstruieren sie hier gerade.

(b) Wir erinnern daran, dass die rationalen Zahlen in der Schule gewöhnlich als 'Brüche' $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dargestellt werden. Ein solcher Bruch korrespondiert mit der Äquivalenzklasse $[(p, q)]$, das heißt also, p stellt den Zähler und q den Nenner des Bruchs dar. Deswegen bilden wir auch die Äquivalenzklassen über das kartesische Produkt $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Warum aber nun Äquivalenzklassen? Aus der Schule wissen wir, dass die Brüche keine eindeutige Darstellung haben, wenngleich sie dieselbe Zahl darstellen. Hier ist ein Beispiel: Die Zahl $\frac{1}{2}$ kann äquivalent geschrieben werden als $\frac{6}{12}$, $\frac{21}{42}$ oder $\frac{5}{10}$ (nur eine kleine Auswahl). Dies formalisiert man nun damit, dass all diese Brüche – die in dieser Aufgabe als Äquivalenzklassen definiert werden – dieselbe Äquivalenzklasse definieren. Machen Sie sich an diesem Beispiel klar, dass das Bilden von Äquivalenzklassen im Prinzip dem 'Kürzen' entspricht.

(c) Von (c) ausgehend, erwarten wir, dass die Summe durch

$$[(p, q)] \widetilde{\oplus} [(p', q')] := [(pq' + p'q, qq')]$$

für alle $(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gegeben sein sollte. Wir zeigen jetzt, dass dies wohldefiniert ist, und hierfür eine kleine Zwischenbemerkung:

Warum muss dies gezeigt werden? Nach Konstruktion der Äquivalenzklassen gilt zum Beispiel $[(1,2)] = [(2,4)]$ und $[(4,5)] = [(-8,-10)]$. Dabei sind $(1,2)$ oder $(4,5)$ sogenannte *Repräsentanten* der Äquivalenzklassen, und nun könnte es sein, dass unsere Definition der Addition wirklich von der speziellen Wahl des Räpresentanten der jeweiligen Äquivalenzklasse abhängt. In diesem Fall wäre die Addition jedoch keine 'wohldefinierte' Operation, da dann zum Beispiel $[(1,2)]\widetilde{\oplus}[(4,5)]$ und $[(2,4)]\widetilde{\oplus}[(-8,-10,)]$ unterschiedliche Ergebnisse liefern würden, obwohl sie eigentlich das Gleiche sind. Das müssen wir also ausschließen.

Zurück zum eigentlichen Beweis. Seien $(p,q),(p',q'),(r,s),(r',s') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gegeben mit $[(p,q)] = [(p',q')]$ und $[(r,s)] = [(r',s')]$. Wir müssen zeigen, dass

$$[(p,q)]\widetilde{\oplus}[(r,s)] = [(p',q')]\widetilde{\oplus}[(r',s')]. \tag{$\spadesuit$}$$

Dies ist nach Definition genau dann der Fall, wenn

$$[(ps+rq,rq)] = [(p's'+r'q',r'q')], \tag{2.1}$$

und dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn

$$(ps+rq,rq) \in [(p's'+r'q',r'q')], \text{ also } (ps+rq,rq) \sim (p's'+r'q',r'q') \tag{2.2}$$

gilt. Nach Definition von '$\sim$' müssen wir also zeigen, dass

$$(ps+rq)(r'q') = (p's'+r'q')(rq)$$

gilt. Wir rechnen

$$(ps+rq)(r'q') = psr'q' + rqr'q' \text{ und } (p's'+r'q')(rq) = p's'rq + r'q'rq$$

und somit (man beachte $rs' = sr'$ und $pq' = p'q$)

$$\begin{aligned}(ps+rq)(r'q') - (p's'+r'q')(rq) &= psr'q' + rqr'q' - p's'rq - r'q'rq \\ &= psr'q' - p's'rq = prs'q' - p's'rq = \\ &= p'qrs' - p'qrs' = 0.\end{aligned}$$

(d) Diese Teilaufgabe ist völlig analog zur Teilaufgabe (c) und wird daher weggelassen.

Aufgabe 3: Tutorium 1–Rechenregeln für Brüche

In der Vorlesung wurde für einen allgemeinen Körper $(K,+,\cdot)$ gezeigt, dass die Gleichung $ax = b$ für $a \neq 0$ eine eindeutige Lösung hat. Diese wird mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet.
Zeigen Sie anhand dieser Definition und den Körperaxiomen, dass die folgenden Rechenregeln für Brüche gelten:

(a) Für alle $a,b \in K$ und $c,d \in K \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}.$$

(b) Für alle $a,b \in K$ und $c,d \in K \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Nach Definition ist $\frac{a}{c}$ definiert (!) als die eindeutige Lösung x der Gleichung $c \cdot x = a$. Genauso ist $\frac{b}{d}$ definiert als die eindeutige Lösung y der Gleichung $d \cdot y = b$.
Ad (a). Wir betrachten nun die Gleichung

$$(c \cdot d) \cdot z = (a \cdot b). \qquad (\heartsuit)$$

Da $c, d \neq 0$, gilt nach Vorlesung $c \cdot d \neq 0$ und somit hat diese Gleichung eine eindeutige Lösung z, und genau wie oben benutzen wir hierfür die Kurzschreibweise

$$z := \frac{a \cdot b}{c \cdot d}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gilt nun

$$\begin{aligned}
(c \cdot d) \cdot \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}\right) &= (c \cdot d) \cdot (x \cdot y) && \text{(nach Definition von } x \text{ und } y\text{)} \\
&= (c \cdot d) \cdot (y \cdot x) && \text{(da in einem Körper Multiplikation kommutativ ist)} \\
&\overset{(*)}{=} c \cdot (d \cdot y) \cdot x && \text{(da in einem Körper Multiplikation assoziativ ist)} \\
&\overset{(\dagger)}{=} (d \cdot y) \cdot (c \cdot x) && \text{(da in einem Körper Multiplikation assoziativ ist)} \\
&= b \cdot a && \text{(nach Definition von } x \text{ und } y\text{)} \\
&= a \cdot b && \text{(da in einem Körper Multiplikation kommutativ ist).}
\end{aligned}$$

Also löst $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$ die Gleichung ($\heartsuit$). Nach Vorlesung ist die Lösung zu dieser Gleichung aber eindeutig und durch z von oben gegeben. Also muss in der Tat

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$

gelten.
Wir begründen nun ($*$), was in dieser Form nicht in den Körperaxiomen auftritt, d.h.

$$(c \cdot d) \cdot (y \cdot x) = c \cdot (d \cdot y) \cdot x \qquad \text{für alle } c, d, x, y \in K.$$

Zum Auflösen der Klammer zeigen wir zuerst

$$(a) \cdot b = a \cdot (b) = a \cdot b \qquad \text{für alle } a, b \in K, \tag{3.1}$$

bzw.

$$(a) \cdot b = a \cdot b \qquad \text{für alle } a, b \in K, \tag{3.2}$$

$$a \cdot (b) = a \cdot b \qquad \text{für alle } a, b \in K. \tag{3.3}$$

Beweis von (3.3). Wir verwenden die Notation aus Forsters Buch, cp. Paragraph 2. Nach Axiom (A.3) gilt $a \cdot (b) = a \cdot (b + 0)$, und nach (D) gilt $a \cdot (b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0$. Nach Formel (2.11) aus Forsters Analysis 1 folgt $a \cdot 0 = 0$, also insgesamt $a \cdot (b) = a \cdot b + 0 = a \cdot b$, wobei wir im letzten Schritt wieder (A.3) benutzt haben. Also gilt $a \cdot (b) = a \cdot b$. Die Identität (3.2), i.e., $(a) \cdot b = a \cdot b$, zeigt man ähnlich.
Nun folgt

$$\begin{aligned}
(c \cdot d) \cdot (y \cdot x) &= c \cdot (d \cdot (y \cdot x)) && \text{(wegen (M.1))} \\
&= c \cdot ((d \cdot y) \cdot x) && \text{(wegen (M.1))} \\
&= c \cdot (d \cdot y) \cdot x && \text{(wegen (3.3)),}
\end{aligned}$$

was $(*)$ ist. Die Aussage $(\dagger)$ folgt ähnlich.
Ad (b). Wie oben ist $z := \frac{ad+bc}{cd}$ definiert als die Lösung der Gleichung

$$(cd)z = (ad + bc).$$

Da $c, d \neq 0$, ist nach (2.12) in Forsters Analysis 1 auch $cd \neq 0$ und somit ist z eindeutig bestimmt. Auf der anderen Seite ist wegen $c, d \neq 0$

($\ddagger$) $x := \frac{a}{c}$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $cx = a$.

($\circledast$) $y := \frac{b}{d}$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $dy = b$.

Es gilt somit

$$\begin{aligned}
(cd)(x+y) &= (cd)x + (cd)y && \text{(wegen (D))} \\
&= c(dx) + c(dy) && \text{(wegen (M.1))} \\
&= c(dx) + c(b) && \text{(wegen } (\circledast)) \\
&= c(dx) + cb && \text{(wegen (3.1))} \\
&= c(xd) + cb && \text{(wegen (M.2))} \\
&= (cx)d + cb && \text{(wegen (M.1))} \\
&= (a)d + cb && \text{(wegen } (\ddagger)) \\
&= ad + cb && \text{(wegen (3.1))} \\
&= ad + bc && \text{(wegen (M.2))}.
\end{aligned}$$

Also löst $x+y$ die Gleichung $(cd)(x+y) = ad+bc$. Aber nach Vorlesung ist diese Lösung eindeutig und gegeben durch $\frac{ad+bc}{cd}$. Also muss $x + y = \frac{ad+bc}{cd}$ sein, und nach Definition von x und y folgt damit, dass

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = x + y = \frac{ad + bc}{cd}.$$

Damit ist alles gezeigt. ■