# KAPITEL 18 UND 19

H. KOCH

## 1. VORLESUNG VOM 08.01.2018

## Kapitel 18

**Definition 1** (Zerlegungen, Treppenfunktionen, Regelfunktionen) *Sei $a < b$.*

1. *Eine* Zerlegung $\tau$ *von* $[a,b]$ *besteht aus einer Zahl* $N \in \mathbb{N}$ *und* $(N+1)$ *reellen Zahlen* $(x_j)_{0 \le j \le N+1}$ *mit*
$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N < x_{N+1} = b.$$
*Sind $\tau$ und $\tau'$ Zerlegungen, so heißt $\tau'$ eine* Verfeinerung *von $\tau$, falls alle Punkte von $\tau$ in $\tau'$ enthalten sind. Es heißt dann*
$$|\tau| := \max\{x_{n+1} - x_n : \ 0 \le n \le N\}$$
*die* Feinheit der Zerlegung $\tau$.
2. *Wir nennen $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine* Treppenfunktion*, falls eine Zerlegung $\tau$ von $[a,b]$ existiert, so dass $\varphi|_{(x_n,x_{n+1})}$ konstant ist für $0 \le n \le N$.*
3. *Wir nennen $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine* Regelfunktion*, falls alle einseitigen Limiten*
$$\lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} \varphi(x), \ \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} \varphi(x), \ \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \varphi(x) \text{ und } \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \varphi(x)$$
*existieren.*

**Bemerkung.**

(a) Jede stetige und jede monotone Funktion ist eine Regelfunktion.
(b) Jede Treppenfunktion ist eine Regelfunktion.
(c) Ist $\varphi$ eine Treppenfunktion und $\tau$ eine Zerlegung wie in der Definition und $y_n \in (x_n, x_{n+1})$ für $0 \le n \le N$, so ist
$$\sum_{n=0}^{N} \varphi(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$
ein Kandidat für ein Integral.

**Definition 2.** *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

1. *Ist $\tau = \{N, (x_j)_{0 \le n \le N+1}\}$ eine Zerlegung, so definieren wir die Untersumme*
$$S_*(f,\tau) = \sum_{n=0}^{N} \inf\{f(x) : \ x_n < x < x_{n+1}\}(x_{n+1} - x_n)$$
*und die Obersumme*
$$S^*(f,\tau) = \sum_{n=0}^{N} \sup\{f(x) : \ x_n < x < x_{n+1}\}(x_{n+1} - x_n).$$
2. *Weiters definieren wir das Unter- bzw. Oberintegral*
$$\int_{a^*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{S_*(f,\tau) : \ \tau \text{ ist Zerlegung}\},$$

*Date*: January 17, 2018.

$$\int_a^{b_*} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S^*(f,\tau)\colon\ \tau \textit{ ist Zerlegung}\}.$$

*Ist*

$$-\infty < \int_{a^*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b_*} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

*so nennen wir* $f$ (Riemann-)integrierbar *und nennen*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a^*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

*das* Integral von $f$ über $[a,b]$.

**Bemerkung.**

1. Es gilt $S_*(f,\tau) \le S^*(f,\tau)$, wobei $S_*(f,\tau) = S^*(f,\tau)$ genau dann gilt, wenn $f$ eine Treppenfunktion mit der Zerlegung $\tau$ ist. Ist $\tau'$ eine Verfeinerung von $\tau$, so gilt
$$\begin{aligned} &S_*(f,\tau) \le S_*(f,\tau') \le S^*(f,\tau') \le S^*(f,\tau),\\ &S^*(f,\tau) < \infty \iff f \text{ nach oben beschränkt},\\ &S_*(f,\tau) > -\infty \iff f \text{ nach unten beschränkt}. \end{aligned}$$
Insbesondere gilt $S_*(f,\tau_1) \le S^*(f,\tau_2)$ für beliebige Zerlegungen $\tau_1, \tau_2$ mit gemeinsamer Verfeinerung $\tau$. Jede Treppenfunktion ist integrierbar.
2. Sei $f$ beschränkt. Es folgt
$$-\infty < \int_{a^*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^{b_*} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

**Lemma 1.** *$f$ ist genau dann integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\tau$ existiert mit $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon$.*

*Proof.* Ist $f$ integrierbar, so ist $f$ beschränkt und es existieren Zerlegungen $\tau_*$ und $\tau^*$ mit

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(f,\tau_*)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(f,\tau^*)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei nun $\tau$ eine gemeinsame Verfeinerungen von $\tau^*$ und $\tau_*$. Dann folgt $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon$. Für die andere Richtung folgt aus $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon$, dass

$$\left|\int_{a^*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b_*} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Wegen Beliebigkeit von $\varepsilon$ folgt die Behauptung. □

**Satz 2.** *Sei $a < b$, $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *$f + g$ und $\lambda f$ sind integrierbar, und es gilt*
$$\int_a^b f + g\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_a^b g\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \lambda f\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$
(b) *Sei $a < c < b$. Es ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ integrierbar sind.*
(c) *Gilt $f \le g$, so ist*
$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

*Proof.* Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1 existieren Zerlegungen $\tau_f$ und $\tau_g$ von $[a,b]$, so dass $S^*(f,\tau_f) - S_*(f,\tau_f) < \varepsilon/2$ und $S^*(g,\tau_g) - S_*(g,\tau_g) < \varepsilon/2$ gelten. Sei nun $\tau$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\tau_f$ und $\tau_g$. Es folgt

$$S^*(f+g,\tau) \leq S^*(f,\tau) + S^*(g,\tau), \quad S_*(f+g,\tau) \geq S_*(f,\tau) + S_*(g,\tau),$$

und damit

$$S^*(f+g,\tau) - S_*(f+g,\tau) \leq S_*(f,\tau) - S_*(f,\tau) + S_*(g,\tau) - S_*(g,\tau) < \varepsilon,$$

womit $f+g$ nach Lemma 1 integrierbar ist. Weiters folgt aus der vorherigen Ungleichung

$$\int_a^b f + g \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x + \int_a^b g \,\mathrm{d}x \;\text{ und }\; \int_a^b f + g \,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f \,\mathrm{d}x + \int_a^b g \,\mathrm{d}x.$$

Damit folgt (a). Der Beweis von (b) ist ähnlich. Zu (c). Da $f \leq g$, folgt $S^*(f,\tau) \leq S^*(g,\tau)$ und $S_*(f,\tau) \leq S_*(g,\tau)$. Damit folgt die Behauptung. □

**Satz 3.** *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind $\max\{f,0\}$, $|f|$ und $f \cdot g$ integrierbar.*

*Proof.* Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1 existiert $\tau$ so, dass $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon$. Da

$$\begin{aligned}\sup\{\max\{f,0\}\colon\; x_n < x < x_{n+1}\} - \inf\{\max\{f,0\}\colon\; x_n < x < x_{n+1}\} \\ \leq \sup\{f(x)\colon\; x_n < x < x_{n+1}\} - \inf\{f(x)\colon\; x_n < x < x_{n+1}\},\end{aligned}$$

folgt, dass

$$S^*(\max\{f,0\},\tau) - S_*(\max\{f,0\},\tau) \leq S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon,$$

und damit ist $\max\{f,0\}$ integrierbar. Da $|f| = \max\{f,0\} - \max\{-f,0\}$, ist $|f|$ integrierbar. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1 existiert $\tau$ mit

$$(S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau)) \sup|g| + (S^*(g,\tau) - S_*(g,\tau)) \sup|f| < \varepsilon.$$

Da für $x, y \in (x_n, x_{n+1})$ gilt

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)| \\ &\leq \sup|f|\big(\sup\{g(t)\colon\; x_n < t < x_{n+1}\} - \inf\{g(t)\colon\; x_n < t < x_{n+1}\}\big) \\ &\quad + \sup|g|\big(\sup\{f(t)\colon\; x_n < t < x_{n+1}\} - \inf\{f(t)\colon\; x_n < t < x_{n+1}\}\big),\end{aligned}$$

folgt, dass $S^*(fg,\tau) - S_*(fg,\tau) < \varepsilon$. Damit ist $f \cdot g$ nach Lemma 1 integrierbar. □

## 2. 2. Vorlesung vom 11.01.2018

**Satz 4.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung $\tau$ der Feinheit $|\tau| < \delta$ gilt*

$$S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon.$$

*Proof.* Sei $\tau_0$ eine Zerlegung mit $N+2$ Punkten und $S^*(f,\tau_0) - S_*(f,\tau_0) < \varepsilon/2$. Diese Ungleichung gilt für jede Verfeinerung. Die Funktion $f$ ist beschränkt. Sei nun $M > 0$ eine Schranke für $|f|$. Ist $\tau$ eine Zerlegung der Feinheit $\delta$, so ist

$$S^*(f,\tau) \leq S^*(f,\tau_0) + 2NM\delta$$

sowie

$$S_*(f,\tau) \geq S_*(f,\tau_0) - 2NM\delta.$$

Damit folgt

$$S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4NM\delta.$$

Die Aussage folgt nun mit der speziellen Wahl $\delta := \varepsilon/(8NM)$. □

**Definition.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $x \in [a,b]$. Die* Sprunghöhe *von $f$ in $x$ ist definiert durch*

$$\Delta f(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \big( \sup\{f(y)\colon |x-y|<\varepsilon,\ y\in[a,b]\} - \inf\{f(y)\colon |x-y|<\varepsilon,\ y\in[a,b]\}\big).$$

**Bemerkung.** Die Funktion

$$H(r) := \sup\{f(y)\colon |x-y|<r,\ y\in[a,b]\} - \inf\{f(y)\colon |x-y|<r,\ y\in[a,b]\}$$

ist monoton wachsend. Daher existiert der Limes. Ist $\Delta f(x) < \varepsilon$, so existiert $\delta > 0$ mit $|f(x_1) - f(x_2)| < \delta$ für alle $x_1, x_2 \in (x-\delta, x+\delta)$.

**Lemma 5.** *Es sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine Regelfunktion, $\varepsilon>0$ und $S := \{x\colon\ \Delta f(x) > \varepsilon\}$. Dann ist $S$ eine endliche Menge.*

*Proof.* (1) Ist $x \in (a,b)$, so existieren die einseitigen Grenzwerte $f_-, f_+$. Es existiert $\delta > 0$ mit $|f(y) - f_-| < \varepsilon/2$ für $x-\delta < y < x$ und $|f(y) - f_+| < \varepsilon/2$ für $x < y < x+\delta$. Also besitzt $S$ kein Element in $(x-\delta, x+\delta)$. (2) Die Menge $S$ ist endlich. Ansonsten gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $S$ mit $x_n \neq x_m$ für $n \neq m$. Nach Bolzano-Weierstraß existiert dann eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ohne Einschränkung gelte also $x_n \to x$. Das steht im Widerspruch zu (1). □

**Lemma 6.** *Es gelte $\Delta f(x) < \varepsilon/2$ für $x\in[a,b]$, $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Dann existiert $\delta>0$, so dass $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ für $|x-y|<\delta$.*

*Proof.* Beweis durch Widerspruch. Falls nicht, so existieren $x_n, y_n$ mit $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ und $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$. Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge, und wird dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass $x_n \to x$ mit $n\to\infty$ für ein $x\in[a,b]$. Dann existiert $\delta>0$ mit $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ für $z_1, z_2 \in (x-\delta, x+\delta)$. Da $N\in\mathbb{N}$ existiert mit $|x_n - x| < \delta/2$ und $|y_n - x| < \delta/2$ für alle $n \geq N$, erhalten wir einen Widerspruch. □

**Satz 7.** *Jede Regelfunktion ist integrierbar. Insbesondere sind also alle stetigen und alle monotonen Funktionen integrierbar.*

*Proof.* Wir wollen Lemma 1 anwenden. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Zerlegung $\tau_0 = (N_0, (x_j))$, so dass $\Delta f(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für alle $j$ und alle $x \neq x_j$. Nach Lemma 7 existiert $\delta$, so dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für alle $x_n < x, y < x_{n+1}$ gilt. Sei nun $\tau$ eine Zerlegung mit $|\tau| < \delta$, die alle $x_j$ enthält. Es folgt

$$S^*(f|_{[x_n,x_{n+1}]}, \tau|_{[x_n,x_{n+1}]}) - S_*(f|_{[x_n,x_{n+1}]}, \tau|_{[x_n,x_{n+1}]}) \leq \sum_{n=0}^{N} (x_{n+1}-x_n)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

und damit

$$S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon.$$

□

**Satz 8.** *Sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $\varepsilon>0$. Dann existiert eine Treppenfunktion $\varphi$ mit*

$$\sup\{|f(x)-\varphi(x)|\colon\ x\in[a,b]\} < \varepsilon.$$

*Proof.* Im Beweis von Satz 7 wählen wir $\tau = (N, (x_n)_{0\leq n\leq N})$ für $\varepsilon/2$ statt $\varepsilon/(2(b-a))$. Eine leicht modifizierte iterative Konstruktion liefert dann die Approximierende $\varphi$. □

**Definition.** *Sei $A\subset\mathbb{R}$ und $f\colon A\to\mathbb{R}$ eine Funktion. $f$ heißt* gleichmäßig stetig, *falls für alle $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ mit $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ für alle $x,y\in A$ mit $|x-y|<\delta$.*
**Satz 9.** *Sei $-\infty<a<b<\infty$ und $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ gleichmäßig stetig.*

*Proof.* Angenommen, $f$ ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass zu jedem $n \geq 1$ Punkte $x_n, x_n' \in [a, b]$ existieren mit $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Sei dies ohne Einschränkung $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit folgt für ihren Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$, und wegen $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n} \to 0$ mit $n \to \infty$ muss auch $x_n' \to x$ gelten mit $n \to \infty$. Da $f$ stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(x_n') = f(x) - f(x) = 0.$$

Dies steht im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Aussage folgt. □

*Gleichmäßige Konvergenz*

**Definition.** *Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f_n, f\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Wir sagen, dass*

(a) *$f_n$ gegen $f$* punktweise konvergiert, *falls für alle $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.*

(b) *$f_n$ gegen $f$* gleichmäßig konvergiert, *falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ und $n \geq N$.*

**Satz 10.** *Seien $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen, die gleichmäßig gegen $f$ konvergieren. Dann ist $f$ integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f_n \,\mathrm{d}x \to \int_a^b f \,\mathrm{d}x, \qquad n \to \infty.$$

*Proof.* Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(4(b - a))$ für alle $x \in [a, b]$ und alle $n \geq N$. Sei weiters die Zerlegung $\tau$ so, dass $S^*(f_N, \tau) - S_*(f_N, \tau) < \varepsilon/2$. Es folgt

$$S^*f - S_*f \leq S^*f_N - S_*(f_N) + S^*(f - f_N) - S_*(f - f_N) < \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b - a) = \varepsilon.$$

Damit ist $f$ integrierbar. Es folgt weiters

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n \,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f - f_n \,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_a^b |f - f_n| \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_a^b f_n \,\mathrm{d}x \to \int_a^b f \,\mathrm{d}x, \qquad n \to \infty$$

und der Satz ist bewiesen. □

## 3. Vorlesung vom 15.01.2018

# Kapitel 19

**Satz 1** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $\varphi\colon [a, b] \to [0, \infty)$ integrierbar und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $x_0 \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f\varphi \,\mathrm{d}x = f(x_0) \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x.$$

*Proof.* Nach Satz 18.3 ist $f\varphi$ integrierbar als Produkt integrierbarer Funktionen. Da $f$ stetig ist, existieren nach dem Satz vom Maximum $x_-, x_+ \in [a, b]$ mit $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$ für alle $x \in [a, b]$. Ist $\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x > 0$. Es folgt

$$f(x_-) \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x \leq f(x_+) \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x$$

und daher

$$f(x_-) \leq \frac{\int_a^b f\varphi \,\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x} \leq f(x_+).$$

Da $f$ stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Falls $b < a$, so definieren wir

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = -\int_b^a f \,\mathrm{d}x.$$

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $x_0 \leq x$. Dann ist

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) \,\mathrm{d}t$$

eine Funktion auf $[a, b]$.

**Definition.** *Ist $F$ eine differenzierbare Funktion im Intervall $I$ mit $F' = f$, so nennen wir $F$ Stammfunktion (von $f$).*

**Lemma.** *Sind $F$ und $G$ Stammfunktionen von $f$, so ist $F - G$ konstant.*

*Proof.* Setze $\widetilde{F} := F - G$. Dann ist $\widetilde{F}$ Stammfunktion der Nullfunktion, $\widetilde{F}' \equiv 0$. Daraus folgt, dass $\widetilde{F}$ konstant ist. □

**Satz 2.** (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei $I$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*

(a) *Für alle $x_0 \in I$ ist*

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) \,\mathrm{d}t$$

*eine Stammfunktion von $f$.*

(b) *Ist $F$ eine Stammfunktion, so gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

*Der Rest wird bis zum 18.01.2018 ergänzt.*