

# Analysis 3, Übungsblatt Nr. 10

Mathematisches Institut  
Prof. Dr. Christoph Thiele  
Dr. Diogo Oliveira e Silva  
Wintersemester 2015/16



**Abgabe in der Vorlesung am 26.01.2016.**  
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

**Aufgabe 1** (Gute Kerne). Eine Familie von Funktionen  $\{K_\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}\}_{\delta>0}$  heißt eine *Familie von guten Kernen*, wenn für alle  $\delta > 0$

- (i)  $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x) dx = 1$ .
- (ii)  $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)| dx \leq A < \infty$ . (Hier ist  $A$  unabhängig von  $\delta$ .)
- (iii) Für jede  $\eta > 0$

$$\int_{|x|\geq\eta} |K_\delta(x)| dx \rightarrow 0, \text{ wenn } \delta \rightarrow 0.$$

Sei  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1$ . Definieren Sie  $\Phi_\delta(x) := \delta^{-d} \varphi(x/\delta)$ ,  $\delta > 0$ . Zeigen Sie, dass  $\{\Phi_\delta\}_{\delta>0}$  eine Familie von guten Kernen ist.

**Aufgabe 2** (Interpolation in  $L^p$ -Räume). Seien  $p_1, p_2, p_3 \in (1, \infty)$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $p_1 < p_2 < p_3$ , so ist

$$L^{p_2} \subset L^{p_1} + L^{p_3}.$$

- (b) Sei  $\theta \in (0, 1)$ . Ist  $\frac{1}{p_2} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_3}$ , so ist

$$\|f\|_{p_2} \leq \|f\|_{p_1}^\theta \|f\|_{p_3}^{1-\theta}.$$

**Aufgabe 3** (Minkowski-Ungleichung für Integrale). Seien  $(X_1, \nu_1)$  und  $(X_2, \nu_2)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume, und sei  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion.

- (a) Seien  $1 \leq p < \infty$  und  $f \geq 0$ . Zeigen Sie:

$$\left( \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x, y) d\nu_2(y) \right)^p d\nu_1(x) \right)^{1/p} \leq \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x, y)^p d\nu_1(x) \right)^{1/p} d\nu_2(y).$$

- (b) Seien  $1 \leq p \leq \infty$  und  $f(\cdot, y) \in L^p(\nu_1)$  für fast alle  $y$ . Angenommen ist, dass die Funktion  $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$  in  $L^1(\nu_2)$  ist. Beweisen Sie:

- (b.1) Die Funktion  $f(x, \cdot) \in L^1(\nu_2)$  für fast alle  $x$ .
- (b.2) Die Funktion  $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y) d\nu_2(y)$  ist in  $L^p(\nu_1)$ .
- (b.3) Es gilt:

$$\left\| \int_{X_2} f(\cdot, y) d\nu_2(y) \right\|_p \leq \int_{X_2} \|f(\cdot, y)\|_p d\nu_2(y).$$

**Aufgabe 4** (Integraloperatoren). Seien  $p \in [1, \infty]$  und  $1/p + 1/q = 1$ . Sei  $K : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion mit  $K(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1} K(x, y)$  für alle  $\lambda > 0$  und so dass

$$\int_0^\infty |K(x, 1)| x^{-1/p} dx = C < \infty.$$

Für  $f \in L^p$  und  $g \in L^q$  definieren Sie die Operatoren

$$Tf(y) := \int_0^\infty K(x, y) f(x) dx \quad \text{und} \quad Sg(x) := \int_0^\infty K(x, y) g(y) dy.$$

Beweisen Sie:

- (a) Die Funktionen  $Tf$  und  $Sg$  sind fast überall wohldefiniert.
- (b) Es gilt:  $\|Tf\|_p \leq C \|f\|_p$  und  $\|Sg\|_q \leq C \|g\|_q$ .

Seien nun

$$Tf(y) := y^{-1} \int_0^y f(x) dx \quad \text{und} \quad Sg(x) := \int_x^\infty y^{-1} g(y) dy.$$

Zeigen Sie:

(a) Sind  $1 < p \leq \infty$  und  $1 \leq q < \infty$ , so ist

$$\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p \quad \text{und} \quad \|Sg\|_q \leq q \|g\|_q.$$