Analysis 3, Übungsblatt Nr. 9

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Abgabe in der Vorlesung am 12.01.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Lip(γ) für $\gamma > 1$)**.** Sei $\gamma > 1$. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\gamma, \quad \forall x, y \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass f konstant sein muss.

Aufgabe 2 (σ-Algebren und Maße)**.** Widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren auf einer Menge X. Dann ist auch die Vereinigung $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra auf X.

(b) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X und jede surjektive Funktion $f : X \to Y$ ist $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf Y.

(c) Sei ν ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dann gilt für jede absteigende Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ und $A_{j+1} \subseteq A_j$ dass

$$\nu\Big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \nu(A_j).$$

(d) Seien $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(d.1) $\nu(\emptyset) = 0$.

(d.2) Für alle paarweise disjunkte Familien $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ konvergiert $\sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(A_j)$ absolut und

$$\nu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(A_j).$$

Dann ist $|\nu| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ ein Maß.

Aufgabe 3 (Gegenbeispiele)**.** Finden Sie Funktionen $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die zeigen, dass folgende Aussagen falsch sind:

(a) Wenn f, f_n integrierbar sind und $f_n(x) \to f(x)$ punktweise fast überall, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f.$$

(b) Wenn f, f_n integrierbar sind und $\int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \to 0.$$

(c) Wenn f, f_n integrierbar sind und

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \to 0,$$

dann konvergiert $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (Kugeln)**.** Für $d \geq 1$ sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$. Die *d-dimensionale Kugel* mit Radius $r > 0$ ist definiert als

$$B_r^d := \Big\{x \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2 \leq r^2\Big\}.$$

Das Volumen der Einheitskugel B_1^d bezeichnen wir mit $\alpha_d := \mu(B_1^d)$. Zeigen Sie die Rekursionsformel

$$\alpha_d = \frac{2\pi}{d} \alpha_{d-2} \qquad \text{für} \qquad d \geq 3.$$

Aufgabe 5 (Integrierbarkeit und Verhalten im ∞)**.** Sei $a > 0$, und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie: Für fast alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n + x/a)$.

(b) Definieren Sie nun die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n + x/a) & \text{falls die Reihe konvergiert,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\int_0^a g(x)dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

(c) Beweisen Sie: Für fast alle $x \in \mathbb{R}$ und all $a > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^{-a} f(nx) = 0.$$

Wir wünschen Ihnen schöne, erholsame Weihnachtsfeiertage und ein gutes, erfolgreiches Neues Jahr!