

# Analysis 3, Übungsblatt Nr. 5

Mathematisches Institut  
Prof. Dr. Christoph Thiele  
Dr. Diogo Oliveira e Silva  
Wintersemester 2015/16



**Abgabe in der Vorlesung am 01.12.2015.**

Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Für  $d \geq 1$  seien  $\mu_*$  und  $\mu$  das äußere Lebesgue-Maß bzw. das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^d$ .

**Aufgabe 1** (Lebesgue-Messbarkeit). Wir betrachten Funktionen  $\{f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$  und  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $f$  stetig, so ist  $f$  Lebesgue-messbar.
- (b) Ist  $f$  monoton steigend, so ist  $f$  Lebesgue-messbar.
- (c) Ist  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge Lebesgue-messbarer Funktionen, so sind

$$\sup_n f_n(x) \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Lebesgue-messbar.

- (d) Sind  $f, g$  Lebesgue-messbar, so sind  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $\min\{f, g\}$  Lebesgue-messbar.

**Aufgabe 2** (Lipschitz-Funktionen und Nullmengen). Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Lipschitz-Funktion. Beweisen Sie:

$$E \subset \mathbb{R}^d : \mu(E) = 0 \implies \mu(f(E)) = 0.$$

**Aufgabe 3** (Andere Cantor-Mengen). Sei  $\alpha$  eine reelle Zahl mit  $0 < \alpha < 1$ . Man beginnt mit dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$ . Aus diesem Intervall wird das offene mittlere Subintervall der Länge  $\alpha$  entfernt, also alle Zahlen, die strikt zwischen  $(1 - \alpha)/2$  und  $(1 + \alpha)/2$  liegen. Übrig bleiben die beiden Intervalle  $[0, (1 - \alpha)/2]$  und  $[(1 + \alpha)/2, 1]$ . Aus diesen beiden Intervallen wird wiederum jeweils das offene mittlere Subintervall der relativen Länge  $\alpha$  entfernt und man erhält nun vier geschlossene Intervalle. Dieser Schritt wird unendlich oft wiederholt. Der Schnitt all dieser Mengen ist dann die  $\alpha$ -Cantor-Menge, die als  $\mathcal{C}_\alpha$  bezeichnet wird.

Beweisen Sie:

- (a) Das Komplement von  $\mathcal{C}_\alpha$  in  $[0, 1]$  ist eine Vereinigung offener Intervalle mit totaler Länge gleich 1.
- (b)  $\mu_*(\mathcal{C}_\alpha) = 0$ .
- (c) Die Hausdorff-Dimension der  $\alpha$ -Cantor-Menge erfüllt  $\dim \mathcal{C}_\alpha = \frac{\log 2}{\log(2/(1-\alpha))}$ .

**Aufgabe 4** (Brunn-Minkowski-Ungleichung). Die Summe zweier messbarer Mengen  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  wird definiert als

$$A + B := \{x \in \mathbb{R}^d : x = x' + x'' \text{ wobei } x' \in A \text{ und } x'' \in B\}.$$

Beweisen Sie die Brunn-Minkowski-Ungleichung

$$\mu(A + B)^{1/d} \geq \mu(A)^{1/d} + \mu(B)^{1/d} \tag{1}$$

wenn:

- (a)  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$   $d$ -dimensionelle Quader sind;
- (b)  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  endliche Vereinigungen  $d$ -dimensioneller Quader mit disjunktem Inneren sind;
- (c)  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  offene Mengen mit  $\mu(A), \mu(B) < \infty$  sind;
- (d)  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakte Mengen sind;
- (e)  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  messbare Mengen sind, so dass  $A + B$  auch messbar ist.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 26.11. ihre Matheparty in der N8schicht.  
Der VVK findet am Mo. 23.11., Di. 24.11. und Mi. 25.11. vor der Mensa Poppelsdorf statt.  
Alle weiteren Infos auch auf [fsmath.uni-bonn.de](http://fsmath.uni-bonn.de).