Analysis 3, Übungsblatt Nr. 1

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Abgabe in der Vorlesung am 03.11.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Partielle Integration). (a) Für $m, n \in \mathbb{N}$ berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx.$$

Aufgabe 2 (Volumen). (a) Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids:

$$\mathcal{E} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}. \quad (a \geq b \geq c > 0)$$

(b) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

$$\mathrm{vol}(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx,$$

wobei $K := \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$.

Aufgabe 3 (Gradientenfelder). Sei $g \in C^1((0,\infty))$ reellwertig. Sei $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $F(x) = g(\|x\|)x$.

(a) Seien $c > 0$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine C^1-Kurve, so dass $\|\gamma(t)\| = c$ für alle $t \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma F = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass F rotationsfrei ist, d.h. $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$ für jedes $i \neq j$ und für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(c) Zeigen Sie, dass F ein Gradientenfeld ist.