

Skript zur Vorlesung Analysis I

Prof. Dr. Christoph Thiele*
Wintersemester 2014/15
Universität Bonn

11. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Logische Grundlagen	2
1.1	Elementare Aussagen	3
1.2	Disjunktion und Konjunktion	7
1.3	Existenz- und Allquantor	13
1.4	Funktionen	19
1.5	Die natürlichen Zahlen	27
1.6	Endliche und unendliche Mengen	33
2	Reelle Zahlen	39
2.1	Dyadische Zahlen	39
2.2	Dedekindschnitte	45
3	Folgen	51
3.1	Monoton wachsende Folgen	51
3.2	Allgemeine Folgen	59
3.3	Konvergenzsätze	69
4	Negative Zahlen	74
4.1	Umordnung von Reihen	79
5	Stetige Funktionen	83

*Mitschrift von Shaoming Guo und Joris Roos.

6	Integration	97
7	Hauptsatz der Infinitesimalrechnung, und Ableitungen	106
8	Erste Ableitungsregeln, Produktregel	111
9	Potenzreihen	114
10	Die Exponentialfunktion	122
11	Reell analytische Funktionen	127
12	Sinus und Kosinus am Einheitskreis	130
13	Komplexe Zahlen	135
14	Integrationstechniken	158
15	Metrische Räume	162
16	Stetige Funktionen und Stone-Weierstraß	167
17	Fouriersche Reihen	176

1 Logische Grundlagen

Wir betrachten das Unterfangen der Mathematik vereinfacht als einen Prozess, im Verlaufe dessen *mathematische Aussagen* bewiesen werden. Die mathematischen Grundlagen bestehen dann aus zwei Komponenten. Die Erste ist eine *formale Sprache*, die geeignet ist den mathematischen Prozess auszudrücken. Die zweite Komponente ist eine Menge von *Regeln*, um mathematische Aussagen und Variablen zu manipulieren. Durch eine dritte Komponente, eine *Interpretation* der mathematischen Aussagen, die bestimmte Aspekte der Realität modellieren, wird mathematischen Sätzen eine Bedeutung für die modellierten Objekte der echten Welt zugeordnet.

Die formale Sprache besteht aus zwei Arten von Symbolen. Einerseits sind dies spezielle Symbole, die einem bestimmten Zweck dienen, wie etwa $=$, \neq , \wedge , \vee , \exists , \forall usw. und andererseits Symbole, die *Variablen* bezeichnen. Variablen sind typischerweise durch Buchstaben aus dem lateinischen oder griechischen Alphabet bezeichnet: $a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \dots$. Es ist jedoch nicht maßgeblich, wie genau die Variablensymbole beschaffen sind. Denkbar, wenn

auch unüblich, ist beispielsweise auch ein mehrere aneinandergereihte Buchstaben umfassender Variablenbezeichner. Sätze der formalen Sprache werden durch geeignetes Aneinanderreihen von Symbolen gebildet. Die dabei relevante Syntax sollte im Zuge dieser Einführung klar werden.

Die Regeln zur Manipulation formalsprachlicher Ausdrücke gehören jeweils zu einer von zwei Kategorien. Einerseits gibt es Regeln, die Symbole für neue Variablen einführen und andererseits *Deduktionsregeln* zum Folgern neuer Aussagen aus bereits Festgestellten.

1.1 Elementare Aussagen

Wir wählen eine sehr generische Interpretation unsres mathematischen Diskurses. Der mathematische Diskurs beschäftigt sich mit *Objekten*. Ein Objekt kann im Prinzip ein gewöhnlicher Alltagsgegenstand, wie etwa ein Stück Kreide sein; meistens handelt es sich jedoch bei Objekten um idealisierte mathematische Objekte, wie zum Beispiel Primzahlen.

Regel 1 (Unkonditionierte Einführung einer Variablen). Zu jedem Zeitpunkt während des mathematischen Prozesses können wir eine neue Variable mit einem beliebigen, notwendigerweise aber noch unbesetzten Symbol einführen. Dieser Akt wird formalsprachlich durch einen Satz ausgedrückt, der bloß aus dem einzuführenden Symbol besteht:

$$x$$

bedeutet also

Sei x ein Objekt.

Definition 1.1. Wenn x, y eingeführte Variablen sind, so sind $x = y, x \neq y$ *elementare Aussagen*.

Eine wesentliche Eigenschaft von Objekten ist, dass sie von anderen Objekten unterschieden werden können. Es liegt nahe, der formalen Aussage $x = y$ die Bedeutung zuordnen zu wollen, dass sich die Objekte, welche die Variablen x und y bezeichnen dieselben sind und entsprechend dem Ausdruck $x \neq y$ die Bedeutung, dass sie sich unterscheiden. Dabei handelt es sich jedoch um eine Interpretation, welche vom Regelwerk der formalen Sprache im Prinzip unabhängig ist. Allerdings werden wir sehen, dass die Regeln der formalen Manipulation elementarer Aussagen gerade so beschaffen sind, dass eben diese universelle Interpretation sinnvoll ist.

Regel 2 (Einführung einer Variablen mit einer Bedingung). Mit der Einführung einer neuen Variablen x können wir eine Bedingung in Form einer formalsprachlichen Aussage P stellen, die nur vorher eingeführte Variablen sowie

die neue Variable x benutzt. Formalsprachlich drücken wir dies durch einen Doppelpunkt aus:

$$x : P$$

bedeutet

Sei x ein Objekt, sodass P gilt.

Ist P zum Beispiel $x = y$, so steht der formale Ausdruck $x : x = y$ für die Einführung einer Variablen x mit der Eigenschaft $x = y$, wobei y eine bereits vorher eingeführte Variable ist. Wir kommen nun zu den ersten Deduktionsregeln.

Regel 3 (Symmetrie für $=$). Haben wir eine Aussage vom Typ $x = y$ schon festgestellt, dann können wir $y = x$ folgern.

Regel 4 (Symmetrie für \neq). Haben wir eine Aussage vom Typ $x \neq y$ schon festgestellt, dann können wir $y \neq x$ folgern.

Das folgende Beispiel zeigt einen mathematischen Diskurs, der zunächst zwei Variablen einführt, und dann die Symmetrie anwendet.

$$a$$

$$b : a = b$$

$$b = a$$

Regel 5 (Tertium non datur¹, TND). Für je zwei Variablen x, y können wir mindestens eine der Aussagen $x = y$ oder $x \neq y$ folgern.

Man beachte, dass hier tatsächlich „*mindestens eine*“ steht und nicht „*genau eine*“. Im Sinne der üblichen Interpretation von $x = y$ als „ x ist gleich y “ und $x \neq y$ als „ x ist nicht gleich y “ ist es natürlich nicht sinnvoll, dass beide Aussagen gleichzeitig gültig sein könnten. Dieser Gesichtspunkt wird erst durch die weitere Entwicklung des Kalküls berücksichtigt werden.

Regel 6 (Substitution für $=$). Seien x, x' zwei Variablen und sei P' eine bereits festgestellte elementare Aussage. Falls wir schon $x = x'$ und $x = x$ festgestellt haben, dann können wir P folgern, wobei P aus P' hervorgeht durch Ersetzen eines x' durch x .

Regel 7 (Substitution für \neq). Seien x, x' zwei Variablen und sei P' eine bereits festgestellte elementare Aussage. Falls wir schon $x \neq x'$ und $x \neq x$ festgestellt haben, dann können wir P folgern, wobei P aus P' hervorgeht durch Ersetzen eines x' durch x .

¹lat. *ein Drittes ist nicht gegeben*.

Man beachte, dass die zwei Aussagen $x = x'$ und $x = x$ in der ersten Substitutionsregel gerade als Beispiel zweier Aussagen P' und P dient, die formal durch eine Substitution eines x' durch ein x auseinander hervorgehen.

Man lasse sich von der Substitutionsregel für \neq nicht verwirren. Sie sorgt für völlige Symmetrie der Regeln für $=$ und \neq .

Zur Übung überlege man sich den Zusammenhang der Substitutionsregel mit der *Transitivität* des Gleichheitszeichens: falls $x = y, y = z$, dann $x = z$.

Die aufgestellten Regeln sollen jetzt verwendet werden, um ein mathematisches Resultat zu beweisen.

Satz 1.2. *Ist für eine Variable x schon $x = x$ festgestellt, dann gilt für jede weitere Variable y auch $y = y$.*

Beweis. Nach TND (Regel 5) haben wir $y = y$ oder $y \neq y$. Wir machen also eine Fallunterscheidung.

Fall 1. $y = y$. Das war zu zeigen.

Fall 2. $y \neq y$. Nach TND haben wir $x = y$ oder $x \neq y$.

Fall 2.1. $x \neq y$. Nach Symmetrie für \neq (Regel 4) haben wir $y \neq x$. Da $y \neq x$ und $y \neq y$ dürfen wir nach der Substitutionsregel für \neq (Regel 7) in der elementaren Aussage $x = x$, x durch y ersetzen². Also erhalten wir $y = y$.

Fall 2.2. $x = y$. Da $x = y$ und $x = x$, können wir nach der Substitutionsregel für $=$ (Regel 6) in der elementaren Aussage $y \neq y$ ein y durch x ersetzen und erhalten daher $x \neq y$. Wir können dann weiter argumentieren wie im Fall 2.1 und folgern $y = y$.

Da wir in allen Fällen $y = y$ gefolgert haben, und wir nach *TND* wissen, dass mindestens einer der Fälle auftritt, haben wir $y = y$ auch absolut gefolgert. \square

Da alle unsere Regeln symmetrisch in $=$ und \neq sind, erhalten wir automatisch auch das symmetrische Resultat.

Satz 1.3. *Ist für eine Variable x schon $x \neq x$ festgestellt, dann gilt für jede weitere Variable y auch $y \neq y$.*

Wir verwenden diese Erkenntnisse, um eine wichtige Aussage über das Wesen von $=$ und \neq zu beweisen.

²Wir brauchen hier *zwei* Anwendungen von Regel 7, da mit jeder Anwendung bloß *ein* x durch y ersetzt wird.

Satz 1.4 (Ex falso quodlibet³). *Haben wir für x, y festgestellt, dass $x = y$ und $x \neq y$, dann können wir jede beliebige elementare Aussage folgern.*

Beweis. Für beliebige eingeführte Variablen a, b ist unter den Voraussetzungen im Satz zu zeigen, dass $a = b$ und $a \neq b$ gefolgert werden können. Wir zeigen zunächst, dass $a = a$ und $a \neq a$ gelten. Nach TND ist $x = x$ oder $x \neq x$.

Fall 1. $x = x$. Nach Regel 6 dürfen wir in $x \neq y$ das y durch ein x ersetzen. Also gilt $x \neq x$.

Fall 2. $x \neq x$. Nach Regel 7 dürfen wir in $x = y$ das y durch ein x ersetzen. Also gilt $x = x$:

In beiden Fällen konnten wir $x = x$ und $x \neq x$ folgern. Daraus folgt nun nach Satz 1.2 und Satz 1.3, dass $a = a$ und $a \neq a$ für beliebiges a . Sind nun a, b eingeführte Variablen, dann gilt nach TND $a = b$ oder $a \neq b$.

Fall 1. $a = b$. Da $a = a$ und $a = b$, dürfen wir in der Aussage $b \neq b$ nach Regel 6 ein b durch ein a ersetzen, also $a \neq b$.

Fall 2. $a \neq b$. Da $a \neq a$ und $a \neq b$, dürfen wir in der Aussage $b = b$ nach Regel 7 ein b durch ein a ersetzen, also $a = b$.

In beiden Fällen konnten wir $a = b$ und $a \neq b$ folgern, was zu zeigen war. \square

Zu jedem Zeitpunkt ist unser mathematischer Prozess in einem der folgenden vier Zustände.

1. Wir haben noch für keine Variable x , $x = x$ oder $x \neq x$ festgestellt.
2. Wir haben schon eine Aussage der Form $x = x$ festgestellt, aber noch keine Aussage der Form $y \neq y$.
3. Wir haben schon eine Aussage der Form $x \neq x$ festgestellt, aber noch keine Aussage der Form $y = y$.
4. Wir haben schon Aussagen von der Form $x = x$ und auch der Form $y \neq y$ gefolgert.

Der erste Fall erweist sich als nicht besonders interessant, da wir ohne Aussagen vom Typ $x = x$ oder $x \neq x$, also Aussagen mit zwei gleichen Variablen, zumindest ohne eine Fallunterscheidung noch gar nicht das Substitutionsprinzip anwenden können. Der vierte Fall ist noch weniger interessant, weil

³lat. aus *Falschem [folgt] Beliebigen*.

wir dann nach Satz 1.4 jede beliebige Aussage haben. Die Fälle 2 und 3 sind völlig symmetrisch. Dort spielen sich alle interessanten mathematischen Diskurse ab. Wir können unsere mathematische Diskussion gleich im Fall 2 beginnen, indem wir als Erstes eine Variable x mit $x = x$ einführen. In dem Fall brechen wir die Symmetrie zwischen $=$ und \neq , denn nach Satz 1.2 gilt nun $x' = x'$ für alle x' . Diese Eigenschaft heißt die *Reflexivität* des Gleichheitszeichens.

Man bemerke, dass die zusätzliche Einführung einer Variablen y mit $y \neq y$ uns sofort in den uninteressanten vierten Fall führen würde. Eine solche Einführung einer Variablen ist also zu vermeiden.

◇ ————— Ende Vorlesung 1, 07.10.2014 ————— ◇

1.2 Disjunktion und Konjunktion

Bisher haben wir nur die reservierten Symbole $=$, \neq kennengelernt. Wir führen das Symbol \vee als Formalisierung der logischen Verknüpfung „oder“ ein.

Definition 1.5. Eine *elementare disjunktive Aussage* ist eine Kette von elementaren Aussagen, die jeweils durch das Symbol \vee verknüpft sind. Sind P_1, P_2, \dots, P_n diese elementaren Aussagen, so schreibt wir schematisch fuer die entsprechende elementare disjunktive Aussage

$$P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n$$

Eine elementare disjunktive Aussage der Länge zwei ist von der Form $P_1 \vee P_2$, eine solche der Länge drei von der Form $P_1 \vee P_2 \vee P_3$ u.s.w. Eine elementare Aussage kann für sich als elementare disjunktive Aussage der Länge eins angesehen werden. Eine syntaktisch korrekte elementare disjunktive Aussage ist natürlich voll ausgeschrieben und hat nicht die Punkte \dots in dem obigen schematischen Ausdruck.

Regel 8. Haben wir von einer Anzahl elementarer Aussagen P_1, P_2, \dots, P_n mindestens eine schon festgestellt, dann dürfen wir die elementare disjunktive Aussage $P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n$ folgern.

Regel 9. Haben wir eine elementare disjunktive Aussage $P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n$ schon festgestellt, dann können wir einen Beweis durch Fallunterscheidung aufbauen:

Fall 1. Wir nehmen P_1 an.

Fall 2. Wir nehmen P_2 an.

...

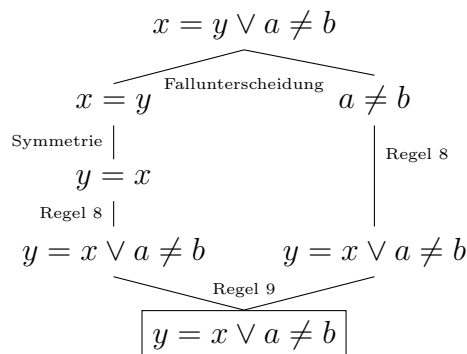
Fall n . Wir nehmen P_n an.

Alles, was wir in allen n Fällen folgern können, gilt als unconditioniert gefolgert.

Durch diese Erweiterung können wir das Tertium non datur auch formal schreiben als

$$a = b \vee a \neq b$$

Der mathematische Prozess kann auch als Flussdiagramm dargestellt werden. Im folgenden Beispiel zeigen wir ein solches Flussdiagramm, um zu zeigen, dass wir aus der Aussage $x = y \vee a \neq b$ mit den bekannten Regeln die Aussage $y = x \vee a \neq b$ folgern können. Dies zeigt exemplarisch, dass die Symmetrieregeln 3 auch für Gleichheitszeichen innerhalb elementar disjunktiver Aussagen gelten.



ähnlich können wir auch die Regeln 4, 6, 7 auf elementar disjunktive Aussagen ausdehnen. Um eine entsprechende Erweiterung des Tertium non datur aufstellen zu können, müssen wir erst das logische „und“, geschrieben \wedge , einführen. Dieses verhält sich dual zu \vee .

Definition 1.6. Eine *elementar konjunktive Aussage* ist eine Kette von elementaren Aussagen, die jeweils durch das Symbol \wedge verknüpft sind. Sind P_1, P_2, \dots, P_n diese elementaren Aussagen, so schreibt wir schematisch fuer die entsprechende elementar konjunktive Aussage

$$P_1 \vee P_2 \wedge \dots \wedge P_n$$

Regel 10. Haben wir jede einzelne der elementaren Aussage P_1, P_2, \dots, P_n bereits festgestellt, dann dürfen wir die elementar konjunktive Aussage $P_1 \vee P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ folgern.

Regel 11. Haben wir eine elementar konjunktive Aussage $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ bereits festgestellt, so dürfen wir jede beliebige der elementaren Aussagen P_1, P_2, \dots, P_n folgern.

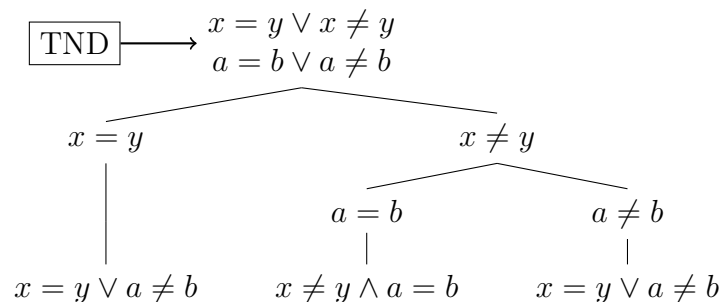
Definition 1.7 (Duale Aussage). Eine elementar konjunktive Aussage und eine elementar disjunktive Aussage sind *dual* zueinander, wenn sie durch Austauschen der Symbole $=, \neq$ einerseits und \vee, \wedge andererseits auseinander hervorgehen.

Zum Beispiel ist die Aussage $x = y \vee a \neq b$ dual zur Aussage $x \neq y \wedge a = b$.

Satz 1.8 (de Morgan'sche Regel, Erweiterung von TND). Wenn P eine elementar disjunktive Aussage ist und Q die dazu duale elementar konjunktive Aussage, dann gilt mindestens eine der Aussagen P und Q .

Wir zeigen den Satz exemplarisch in dem Fall der Aussagen $x = y \vee a \neq b$ und $x \neq y \wedge a = b$, der allgemeine Fall kann ähnlich bewiesen werden.

Beweis. Wir stellen den Beweis in Form eines Flussdiagrammes dar.



In allen Fällen konnten wir eine der Aussagen $x = y \vee a \neq b$ oder $x \neq y \wedge a = b$ zeigen. □

TND besagt also in dieser erweiterten Fassung, dass von zwei dualen Aussagen mindestens eine gelten muss. In der Absicht die Aussage von Satz 1.8 formal aufzuschreiben, ist man versucht den folgenden Ausdruck hinzuschreiben:

$$(x = y \vee a \neq b) \vee (x \neq y \wedge a = b)$$

Allerdings haben wir Aussagen von diesem Komplexitätsgrad und insbesondere die Klammersymbole $(,)$ noch nicht eingeführt.

Definition 1.9. Sind für eine gewisse Anzahl n , P_1, \dots, P_n elementarer konjunktive Aussagen verschiedener Längen, dann ist $(P_1) \vee (P_2) \vee \dots \vee (P_n)$ eine *disjunktive Aussage (zweiter Ordnung)*.

Definition 1.10. Sind für eine Anzahl n , P_1, \dots, P_n elementare disjunktive Aussagen möglicherweise verschiedener Längen, dann ist $(P_1) \wedge (P_2) \wedge \dots \wedge (P_n)$ eine *konjunktive Aussage (zweiter Ordnung)*.

Für disjunktive Aussage haben wir

Regel 12. Haben wir von einer Anzahl elementarer konjunktive Aussagen P_1, \dots, P_n , mindestens eine schon festgestellt, dann dürfen wir $(P_1) \vee \dots \vee (P_n)$ folgern.

Regel 13. Haben wir von einer Anzahl elementarer disjunktiver Aussagen P_1, \dots, P_n , mindestens eine schon festgestellt, dann dürfen wir $(P_1) \wedge \dots \wedge (P_n)$ folgern. Haben wir eine disjunktive Aussage $(P_1) \vee \dots \vee (P_n)$ schon festgestellt, dann können wir einen Beweis durch Fallunterscheidung aufbauen:

Fall 1. Wir nehmen P_1 an.

...

Fall n Wir nehmen P_n an.

Alles, was wir in jedem der Fälle folgern können, gilt als unconditioniert gefolgert.

Regel 14. Haben wir eine Anzahl elementarer disjunktiver Aussagen P_1, \dots, P_n bereits festgestellt, dann dürfen wir $(P_1) \wedge \dots \wedge (P_n)$ folgern.

Regel 15. Haben wir eine konjunktive Aussage $(P_1) \wedge \dots \wedge (P_n)$ bereits festgestellt, so dürfen wir jede einzelne der Aussagen P_1, \dots, P_n folgern.

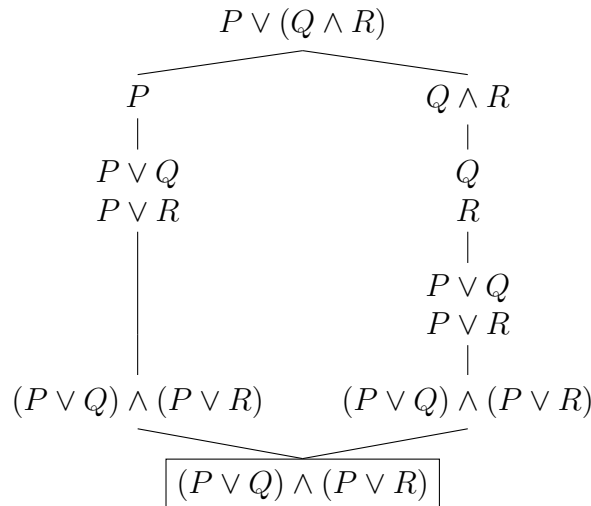
Ist P eine einzelne elementar konjunktive Aussage, so ist (P) eine disjunktive Aussage. Aus den obigen Regeln kann man herleiten, dass wir (P) aus P folgern können und umgekehrt. Analoges gilt für konjunktive Aussagen der Länge eins.

Wir könnten nun durch weitere Iteration konjunktive und disjunktive Aussagen höherer Ordnungen definieren, jedoch stellt sich heraus, dass jede Aussage höherer Ordnung auf eine disjunktive oder konjunktive Aussage höchstens der oben eingeführten Ordnung zwei zurückgeführt werden kann. In der Tat kann sogar jede konjunktive in eine gleichwertige disjunktive Aussage umgewandelt werden, und umgekehrt.

Satz 1.11 (Distributivgesetze). *Es seien P, Q, R elementare Aussagen.*

1. Aus $P \wedge (Q \vee R)$ folgt $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ und umgekehrt.
2. Aus $P \vee (Q \wedge R)$ folgt $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ und umgekehrt.

Beweis. Wir zeigen exemplarisch, wie aus $P \vee (Q \wedge R)$ die Aussage $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ gefolgert werden kann. Die andere Richtung und der zweite Teil des Satzes sind ähnlich zu beweisen.



□

Es können auch leicht die entsprechenden Distributivgesetze mit größeren Anzahlen von elementaren Aussagen bewiesen werden. Aufgrund der Distributivgesetze benötigen wir keine weiteren Verschachtelungen der Definitionen disjunktiver und konjunktiver Aussagen, um alle Aussagen beschreiben zu können, die sich aus naivem Verknüpfen von Aussagen durch \vee oder \wedge bilden lassen.

Wir fassen diese Tatsache zusammen wie folgt, hier bezeichnen wir mit Aussage ein solche die disjunktiv oder konjunktiv ist.

Satz 1.12. *Seien P und Q Aussagen. Dann gibt es eine Aussage R mit den Eigenschaften*

1. *Ist mindestens eine von den Aussagen P und Q bereits festgestellt, so können wir R folgern.*
2. *Ist R bereits festgestellt, so können wir eine Fallunterscheidung aufbauen: In einem Fall nehmen wir P an und im anderen Q . Alles, was wir in beiden Fällen beweisen können, dürfen wir unkonditioniert folgern.*

Wir skizzieren hier den Beweis nur: sind P, Q jeweils konjunktive oder disjunktive Aussagen, so können wir sie beide in disjunktive Aussagen umwandeln und können dann R definieren als Konkatenation der disjunktiver

Aussagen, das heißt Hintereinanderschreiben der Aussagen, verbunden mit dem Symbol \vee . Also ist R wieder eine disjunktive Aussage.

Die Aussage R ist syntaktisch nicht eindeutig bestimmt, sie kann zum Beispiel auch als eine konjunktive Aussage geschrieben sein. Allerdings folgt aus einer Anwendung des Satzes, dass wenn zwei Aussagen R und R' die Eigenschaften des Satzes erfüllen, dann kann man R aus R' und ebenso R' aus R folgern. In diesem Sinne ist die mangelnde syntaktische Eindeutigkeit für Anwendung in einer Beweiskette ohne Konsequenzen.

Definition 1.13. Wir schreiben $(P) \vee (Q)$ für eine Aussage R , die die Eigenschaften des Satzes 1.12 erfüllt.

Satz 1.14. *Seien P und Q Aussagen. Dann gibt es eine Aussage R mit den Eigenschaften*

1. *Ist von den Aussagen P und Q beide bereits festgestellt, so können wir R folgern.*
2. *Ist R bereits festgestellt, so können wir jede der beiden Aussagen P und Q folgern.*

Der Beweis ist ganz ähnlich wie oben, wir wandeln P, Q in konjunktive Aussagen um und erhalten R als konkatenierte konjunktive Aussage.

Die Aussage R ist erneut syntaktisch nicht eindeutig bestimmt, wieder folgt aus Anwendung des Satzes, dass wenn zwei Aussagen R und R' die Eigenschaften des Satzes erfüllen, dann kann man R aus R' und R' aus R folgern.

Definition 1.15. Wir schreiben $(P) \wedge (Q)$ für eine Aussage R , die die Eigenschaften des Satzes 1.14 erfüllt.

Weitere Symbole.

- Negation: $\neg P$, gelesen “nicht P ”, ist die duale Aussage zu P .
- Implikation: $P \Rightarrow Q$, gelesen “ P impliziert Q ”, bedeutet $\neg P \vee Q$.
- äquivalenz: $P \Leftrightarrow Q$, gelesen “ P ist äquivalent zu Q ”, bedeutet $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Ein allgegenwärtiger Aspekt ist die im mathematischen Prozess inhärente *Zeitordnung*. Diese ergibt sich auf natürliche Weise durch das sequentielle Notieren mathematischer Symbole, und das sequentielle Folgern von Aussagen. Die sequentielle Ordnung geht mitunter in logischen Ausdrücken verloren. Beispielsweise betont die Schreibweise $P \Rightarrow Q$ die zeitliche Reihenfolge von P und Q , während der äquivalente Ausdruck $\neg P \vee Q$ oder auch $Q \vee \neg P$ keinen Eindruck einer zeitlichen Abfolge mehr vermittelt.

1.3 Existenz- und Allquantor

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die Variableneinführung durch möglicherweise entstehende Widersprüche eine gewisse Gefahr birgt. Ein Widerspruch ist dabei das Bestehen einer Aussage der Form $x = y \wedge x \neq y$, die uns sofort in den unerwünschten vierten Zustand führt (nach obiger Klassifikation).

Beispielsweise führt der mathematische Diskurs

$$\begin{aligned} z &= y \\ x : x &= y \wedge x \neq z \end{aligned}$$

zu einem Widerspruch (also in den Fall 4). Zur Formalisierung der Aussage, dass die Einführung einer Variablen nicht zu Widersprüchen führt, führen wir ein neues Symbol ein. Dabei handelt es sich um den Existenzquantor \exists . Ein Ausdruck der Form

$$\exists x' : x' = y \wedge x' \neq z$$

wird wie folgt gelesen:

Es existiert ein x' , sodass $x' = y \wedge x' \neq z$ gilt.

Dabei ist x' eine Variable die zuvor nicht eingeführt wurde. Allerdings verstehen wir das x' nur als temporäre Variable, eingeführt nur für die Aussage in der der Quantor steht. Für eine spätere Aussage oder Variableneinführung gilt x' also wieder als unbenutzt.

Betrachtet man in einer Existenzaussage $\exists x : P$, wobei wir annehmen dass P die Variable x enthält, den Ausdruck P für sich, so ist er keine Aussage, da er die nicht eingeführte Variable x enthält. Einen solcher Ausdruck nennt man eine *Eigenschaft* in dieser Variablen x . Nur im Zusammenhang mit dem Quantor $\exists x$ wird aus der Eigenschaft eine Aussage. Wir verwenden syntaktische Begriffe wie “disjunktiv” und “konjunktiv” für Eigenschaften ganz analog wie für Aussagen.

Der Umgang mit dem Existenzquantor wird durch zwei neue Regeln festgelegt.

Regel 16. Ist x eine eingeführte Variable und P eine festgestellte (disjunktive oder konjunktive) Aussage, dann dürfen wir $\exists x' : P'$ folgern⁴, wobei P' aus P entsteht durch Ersetzen *aller* x durch x' .

⁴Hierbei nehmen wir an, dass der Variablenbezeichner x' bisher unbenutzt ist.

Regel 17. Haben wir $\exists x : P$ festgestellt und ist P eine disjunktive oder konjunktive Eigenschaft, so dürfen wir gefahrlos x' einführen mit P' , wobei P' aus P entsteht durch Ersetzen aller x durch x' .

Hierbei verstehen wir unter gefahrlosem Einführen der Variablen, dass jeder Widerspruch, der möglicherweise durch Einführung von x' erzeugt wird, als bereits aus $\exists x : P$ gefolgert angesehen werden soll. Die Einführung der Variablen x' erzeugt somit per Konvention keine Widersprüche, die nicht ohnehin schon aus der existentiellen Aussage folgen.

Dass gefahrloses Einführen möglich ist, wird zum Beispiel durch folgende Regeln gewährleistet.

Regel 18. Angenommen x ist schon eingeführt, dann gilt $\exists y : x = y$.

Regel 19. Angenommen x ist schon eingeführt, dann gilt $\exists y : x \neq y$.

Haben wir bereits ein Element mit $a = a$ eingeführt, stellt die letzte Regel insbesondere sicher, dass das Universum mindestens ein weiteres Objekt enthält.

Wieder können wir uns die Frage stellen, wie sich die bisherigen Regeln unter dieser Erweiterung verhalten. Nehmen wir zum Beispiel an, dass $\exists x : x = y$ gilt. Können wir daraus schließen, dass $\exists x : y = x$? Die Antwort ist ja. Aus $\exists x : x = y$ folgt nach Regel 17, dass wir x' mit $x' = y$ einführen dürfen. Nach Symmetrie gilt $y = x'$ und nach Regel 16 folgt $\exists x : y = x$.

Haben wir eine Existenzaussage $\exists x : P$, so können wir x' mit P' einführen. Sei nun \tilde{x} eine andere Variable, die die Aussage \tilde{P} erfüllt, wobei \tilde{P} aus P durch Ersetzen aller x durch \tilde{x} entsteht, so können wir nicht ohne weiteres $x' = \tilde{x}$ folgern. Sollte aber P gerade so beschaffen sein dass man eben doch von P' und \tilde{P} auf $x = \tilde{x}$ schliessen kann, so spricht man von Eindeutigkeit des Elementes x' das P' erfüllt. Eine Eindeutigkeitsaussage vom Typ

$$\forall x \forall x' : (Q') \vee (Q) \vee (x = x')$$

wobei P' und \tilde{P} die dualen Eigenschaften zu P und P' sind, muss aber getrennt von der Existenzaussage

$$\exists x : P$$

gezeigt werden.

◇ ————— Ende Vorlesung 2, 09.10.2014 ————— ◇

Das zum Existenzquantor duale Symbol ist der Allquantor \forall . Die Aussage

$$\forall x : x = y$$

lesen wir als

Für alle x gilt $x = y$.

Zum Allquantor gibt es die folgenden Regeln, in Analogie zu den Regeln 16 und 17.

Regel 20. Angenommen x ist eine unconditioniert eingeführte Variable (eingeführt nach Regel 1). Sei P eine festgestellte disjunktive oder konjunktive Aussage, wobei P nur x und solche Variablen enthält, die vor x eingeführt wurden. Dann können wir $\forall x' : P'$ folgern, wobei P' aus P entsteht durch Ersetzen aller x durch x' .

Regel 21. Wenn $\forall x : P$ für eine (disjunktive oder konjunktive) Eigenschaft P festgestellt ist und x' eine eingeführte Variable ist, so können wir P' folgern, wobei P' aus P entsteht durch Ersetzen aller x durch x' .

Beispiel. Sei y eine eingeführte Variable. Dann gilt $\forall x : x \neq y \vee y = x$.

Beweis. Sei y eingeführte Variable. Sei x' eine Variable. Nach TND gilt $x' \neq y \vee x' = y$. Nach Symmetrie gilt $x \neq y \vee y = x'$. Nach Regel 20 folgt $\forall x : x \neq y \vee y = x$. \square

Definition 1.16. Ist P eine disjunktive oder konjunktive Aussage, so heißen $\forall x : P$ und $\exists x : P$ *quantifizierte Aussagen (der Ordnung 1)*.

Disjunktive und konjunktive Aussagen bezeichnet man auch als quantifizierte Aussagen nullter Ordnung.

Die Definition 1.7 erweiternd nennen wir zwei quantifizierte Aussagen P, Q *dual* zueinander, wenn sie durch entsprechendes Austauschen der Symbolpaare $=, \neq$ und \vee, \wedge und \exists, \forall auseinander hervorgehen.

Zur Erweiterung des TND brauchen wir anders als im Falle der Einführung der Symbole \vee, \wedge eine neue Regel.

Regel 22 (TND). Von zwei zueinander dualen quantifizierten Aussagen der Ordnung 1 gilt mindestens eine.

Regel 22 kann nicht aus den bisherigen Regeln abgeleitet werden. Dies stellt einen interessanten Gegensatz dar zu den TND Eigenschaften von disjunktiven und konjunktive Aussagen, die alle durch Fallunterscheidung bewiesen

werden konnten. Der Versuch, eine solche Fallunterscheidung hier analog aufzubauen scheitert daran, dass unendlich viele Fälle untersucht werden müssten, die zudem noch nicht einmal klar umrissen sind.

Wir diskutieren exemplarisch einen Satz, der die Behandlung von “und” und “oder” Verknüpfungen im Zusammenhang mit Quantoren aufzeigt.

Satz 1.17. *Sei P elementare Eigenschaft in x und Q elementare Aussage (die x nicht enthalten kann), und sei mindestens eine der Aussagen $\forall x : P$ und Q bewiesen. Dann können wir $\forall x : P \vee Q$ folgern. Ist umgekehrt $\forall x : P \vee Q$ bewiesen und Q enthält nicht x , so können wir einen Beweis durch Fallunterscheidung durchführen mit den Fällen $\forall x : P$ und Q .*

Beweis. Wir beweisen exemplarisch die erste Richtung: Wir machen eine Fallunterscheidung. Im ersten Fall nehmen wir an, dass $\forall x : P$ bereits festgestellt ist. Sei x' eine Variable. Dann gilt P' nach Regel 21. Es folgt $P' \vee Q$. Also gilt $\forall x : P \vee Q$ nach Regel 20. Dabei beachte man, dass Q kein x' enthalten kann. Den anderen Fall überlassen wir dem Leser als Übung. \square

Einen analogen Satz für allgemeine konjunktive oder disjunktive Aussagen kann man mithilfe von 1.12 und den darauffolgenden Bemerkungen formulieren. Man kann dann eine quantifizierte Aussagen erster Ordnung mit einer solchen nullter Ordnung durch \vee verknüpfen und erhält

$$(\forall x : P) \vee (Q) \text{ ist gleichbedeutend mit } \forall x : (P) \vee (Q) .$$

Gleichermassen kann man einführen

$$(\exists x : P) \vee (Q) \text{ ist gleichbedeutend mit } \exists x : (P) \vee (Q)$$

$$(\forall x : P) \wedge (Q) \text{ ist gleichbedeutend mit } \forall x : (P) \wedge (Q)$$

$$(\exists x : P) \wedge (Q) \text{ ist gleichbedeutend mit } \forall x : (P) \wedge (Q)$$

Als nächstes führen wir quantifizierte Aussagen höherer Ordnung, also mit mehreren Quantoren, ein. Ist P eine quantifizierte Eigenschaft erster Ordnung in x , also ein Ausdruck der formal einer quantifizierten Aussage analog ist aber eine nicht eingeführte und nicht quantifizierte Variable x enthält, so sind $\forall x P, \exists x P$ *quantifizierte Aussagen zweiter Ordnung*. Entsprechend führen wir *quantifizierte Aussagen n -ter Ordnung* für $n = 3, 4, 5, \dots$ ein. Zum Beispiel ist

$$\forall x \forall y : x = y \vee x \neq y$$

eine quantifizierte Aussage zweiter Ordnung. Es handelt sich dabei um die formalisierte Fassung des Tertium non datur für elementare Aussagen. Entsprechend handelt es sich bei

$$\forall x \exists y : x = y$$

um eine Formalisierung der Regel 18. Auch dies ist eine quantifizierte Aussage zweiter Ordnung.

Für die quantifizierten Aussagen n ter Ordnung stellen wir die den Regeln 16, 17, 20, 21, 22 bis 22 entsprechenden Regeln auf.

Regel 23. Ist x eine eingeführte Variable und P eine bewiesene quantifizierte Aussage n -ter Ordnung, so können wir $\exists x' : P'$ folgern, wobei P' aus P entsteht durch Ersetzen aller x durch x' .

Regel 24. Haben wir eine quantifizierte Aussage $\exists x : P$ der Ordnung $n + 1$ festgestellt (also hat P selbst n Quantoren), so dürfen wir gefahrlos x' einführen mit P' , wobei P' aus P entsteht durch Ersetzen aller x durch x' .

Regel 25. Angenommen x ist eine unconditioniert eingeführte Variable (eingeführt nach Regel 1). Sei P eine festgestellte quantifizierte Aussage n ter Ordnung, wobei P nur x und solche Variablen enthält, die vor x eingeführt wurden, sowie quantifizierte Variablen. Dann können wir $\forall x' : P'$ folgern, wobei P' aus P entsteht durch Ersetzen aller x durch x' .

Regel 26. Wenn eine quantifizierte Aussage $\forall x : P$ der Ordnung $n + 1$ festgestellt ist und x' eine eingeführte Variable ist, so können wir P' folgern, wobei P' aus P entsteht durch Ersetzen aller x durch x' .

Erneut müssen wir Tertium non datur in dieser Allgemeinheit als Regel fordern.

Regel 27 (TND). Von zwei zueinander dualen quantifizierten Aussagen der Ordnung n gilt mindestens eine.

Satz 1.18 (Vertauschungsregeln für Quantoren).

1. Ist $\forall x \forall y : P(x, y)$ für eine quantifizierte Aussage $P(x, y)$ bereits festgestellt⁵, so folgt $\forall y \forall x : P(x, y)$.
2. Ist $\exists x \exists y : P(x, y)$ bereits festgestellt, so können wir $\exists y \exists x : P(x, y)$ folgern.
3. Ist $\exists x \forall y : P(x, y)$ festgestellt, so können wir $\forall y \exists x : P(x, y)$ folgern.

Beweis. 1. Wir führen eine neue Variable y' ein ohne Bedingung. Dann führen wir eine neue Variable x' ein ohne Bedingung. Nach Regel 26 gilt $\forall y' : P(x', y')$. Genauso folgt $P(x', y')$ nach Regel 21. Regel 20

⁵Die Notation $P(x, y)$ deutet nur darauf hin, dass die Aussage die Variablen x und y enthält. Mit $P(x', y')$ ist dann die entsprechend substituierte Aussage gemeint.

liefert $\forall x : P(x, y')$ und Regel 25 schließlich $\forall y \forall x : P(x, y)$, wobei wir herausstreichen, dass zwar x' nach y' eingeführt wurde, aber nicht Anwendbarkeit der Regel verhindert, da x' nicht in der benutzten Aussage vorkommt.

2. Dies überlassen wir dem Leser.

3. Sei y' eine Variable. Nach Regel 24 dürfen wir eine Variable x' mit $\forall y : P(x', y)$ einführen. Regel 21 ergibt dann $P(x', y')$. Nach Regel 16 folgern wir $\exists x : P(x, y')$. Regel 25 liefert dann $\forall y \exists x : P(x, y)$. □

Der in diesem Satz fehlende Fall bildet eine Ausnahme zu den Vertauschungsregeln. Aus $\forall x \exists y : P(x, y)$ dürfen wir **nicht** $\exists y \forall x : P(x, y)$ folgern.

Beispiel. Regel 18 besagt $\forall y \exists x : x = y$.

Gilt auch $\exists x \forall y : x = y$?

Die Antwort ist *nein*. Wir zeigen dies durch einen Widerspruchsbeweis. Falls $\exists x \forall y : x = y$ gilt, dürfen wir x' mit $\forall y : x' = y$ wählen. Nach Regel 19 gilt $\exists y : x' \neq y$. Wähle y' mit $x' \neq y'$. Wegen $\forall y : x' = y$ gilt auch $x' = y'$. Das ist ein Widerspruch⁶!

Für das Verknüpfen von quantifizierten Aussagen durch \vee und \wedge gelten analoge Aussage zu denen, die wir im Falle einfach quantifizierter Aussagen besprochen haben. In diesem Zusammenhang ist eine weitere sprachliche Konvention hilfreich, die ähnlich der Verknüpfung von höheren Ausdrücken ist. Allgemein ist eine quantifizierte Aussage in zwei Teile geteilt. Zunächst kommen alle Quantoren mit den entsprechenden gebundenen Variablen, dann kommt ein Doppelpunkt, und dann ein konjunktiver oder disjunktiver Ausdruck. Es ist oft intuitiv bequem, Teile der konjunktiven oder disjunktiven Aussage vorzuziehen. Dazu benutzen wir die folgende Konvention: Ist

$$\forall x \dots : (P) \vee (Q)$$

eine Aussage so dass in P zwar x vorkommt aber keine der unter \dots eingeführten Variablen, und ist R die duale Aussage zu P , so schreiben wir

$$\forall R \dots : Q$$

wobei \dots eine Kopie des oben mit \dots bezeichneten Ausdruckes ist. Dies ist zu lesen als "Für alle x mit R gilt ...". Das x wird dabei nicht explizit bei

⁶i.e. die Voraussetzungen von Ex falso quodlibet (Satz 1.4) sind erfüllt.

dem Quantor geschrieben, da R eine Eigenschaft in x ist und daher x zu erkennen ist als einzige noch nicht eingeführte Variable in R . Ganz ähnlich verfahren wir mit Existenzaussagen: ist

$$\exists x \dots : (P) \wedge (Q)$$

eine Aussage so dass in P zwar x vorkommt aber keine der unter \dots eingeführten Variablen, so schreiben wir

$$\exists P \dots : Q$$

Dies ist zu lesen als “Es existiert ein x mit P so dass ...”

1.4 Funktionen

Man wäre gerne in der Lage die Quantoren allgemein zu vertauschen. Dies führt zu einer weiteren, letzten fundamentalen Spracherweiterung (alle weiteren Spracherweiterung werden lediglich Abkürzungen sein und ohne neue Regeln auskommen). Die Wurzel des Problems ist, dass in der Aussage

$$\forall x \exists y : P(x, y) \tag{1}$$

das y von x abhängen kann: *für jedes x existiert ein y , sodass $P(x, y)$ gilt.* Dies führt natürlicherweise auf den Begriff der *Funktion*. Eine Funktion ist eben eine solche Vorschrift, die jedem Objekt wieder ein Objekt zuordnet. Die grundlegende Idee ist, dass eine Funktion f existiert (also “ $\exists f$ ”), sodass “ $\forall x : P(x, f(x))$ ” gilt. Formal aufgeschrieben ergäbe sich der Ausdruck

$$”\exists f \forall x : P(x, f(x))”$$

Die Anführungszeichen deuten hier darauf hin, dass unsere bisherige Syntax derartige Ausdrücke noch nicht erlaubt. Man bemerke jedoch, dass die Quantoren entgegen dem Ausdruck (1) wie gewünscht vertauscht sind. Die Einführung von Funktionen wirft viele Fragen auf. Sind Funktionen auch Objekte? Da Objekte gemäß unserer universellen Interpretation *alles* sein können, möchten wir diese Frage gerne bejahen. Wir könnten sogar weiter gehen und Funktionen auf elegante Weise einführen, indem wir alle Objekte auch als Funktionen betrachten. Dies ist so zu verstehen, dass es zu jedem Objekt f und jedem weiteren Objekt x eine *Auswertung*, also wieder ein Objekt gibt, dass wir mit $f(x)$ bezeichnen. Dabei ist es nicht wesentlich, dass wir das Funktionsobjekt mit dem Buchstaben f bezeichnen. Der Ausdruck $x(f)$ bezeichnet genauso ein Objekt. Die „reinen Objekte“ erfüllen dabei

$$\forall x : f(x) = f$$

Auswertung führt also stets auf das ursprüngliche Objekt, das Objekt f ignoriert sozusagen das (x) .

Um die Auswertung zu unserer Syntax hinzuzufügen erweitern wir die Definition elementarer Aussagen.

Definition 1.19. Sind f, x, y eingeführte Variablen, so sind

$$\begin{aligned}x &= y, x \neq y \\ f(x) &= y, f(x) \neq y\end{aligned}$$

elementare Aussagen.

Man beachte, dass die Funktionsauswertung in elementaren Aussagen stets auf der linken Seite steht. Ausdrücke der Form $y = f(x)$ sind im Moment in unserer Syntax nicht erlaubt und nicht notwendig. Später kann man dann aus Bequemlichkeit den Ausdruck $y = f(x)$ als gleichwertig zu $f(x) = y$ ansehen, aber das tun wir erst wenn die fundamentale Theorie ihren Abschluss gefunden hat.

Beispiele. Die folgenden Ausdrücke sind (neue) elementare Aussagen.

$$\begin{aligned}x(x) &= x \\ y(x) &= x \\ x(y) &= x \\ x(x) &= x \\ y(y) &= y\end{aligned}$$

Zu den neuen elementaren Aussagen gehören auch folgende neue Erweiterungsregeln.

Regel 28 (Substitution für $=$). Seien f, x, y eingeführte Variablen. Wenn $f(x) = y$ und $y = y$ bereits gefolgert sind und P' eine bereits festgestellte elementare Aussage ist, dann können wir P folgern, wobei P aus P' hervorgeht durch Ersetzen eines $f(x)$ durch y .

Man beachte, dass eine solche Substitution in jedem Fall wieder eine syntaktisch erlaubte elementare Aussage liefert. Gleiches gilt für die folgenden Substitutionsregel.

Regel 29 (Substitution für \neq). Seien f, x, y eingeführte Variablen. Wenn $f(x) \neq y$ und $y \neq y$ bereits gefolgert sind und P' eine bereits festgestellte elementare Aussage ist, dann können wir P folgern, wobei P aus P' hervorgeht durch Ersetzen eines $f(x)$ durch y .

Die folgenden Substitutionsregeln lesen sich wie die Regeln 6 und 7, sind aber neu, da sie auch das Substituieren innerhalb des neuen Typus von Elementaraussagen erlauben. Insbesondere dürfen dann also auch Variablen auf der linken Seite von $f(x) = y$ substituiert werden.

Regel 30 (Substitution für $=$). Seien x, x' zwei Variablen und sei P' eine bereits festgestellte elementare Aussage. Falls wir schon $x = x'$ und $x = x$ festgestellt haben, dann können wir P folgern, wobei P aus P' hervorgeht durch Ersetzen eines x' durch x .

Regel 31 (Substitution für \neq). Seien x, x' zwei Variablen und sei P' eine bereits festgestellte elementare Aussage. Falls wir schon $x \neq x'$ und $x \neq x$ festgestellt haben, dann können wir P folgern, wobei P aus P' hervorgeht durch Ersetzen eines x' durch x .

Wir haben das folgende zusätzliche Tertium non datur:

Regel 32 (TND). Sind f, x, y eingeführte Variablen, dann gilt

$$f(x) = y \vee f(x) \neq y.$$

Man wiederholt nun im Prinzip den gesamten bisherigen Aufbau an Regeln, wobei der Begriff *elementare Aussage* durch den neuen Satz an elementaren Aussagen interpretiert wird. Diese Erweiterung der Regeln ist ganz analog und birgt keine weiteren Überraschungen und wir werden dies daher nicht explizit diskutieren.

Um die oben diskutierte Vertauschung der Quantoren im Ausdruck $\forall x \exists y : P(x, y)$ zu bewerkstelligen, hätten wir nun gerne die folgende Regel.

Auswahlaxiom⁷ (vorläufige und unbrauchbare Version). Sei $P(x, y)$ eine Aussage, in der y nur auf der linken Seite einer elementaren Aussage und nicht als Teil eines funktionalen Ausdrucks auftritt. Sei $\forall x \exists y : P(x, y)$ bewiesen. Dann können wir $\exists f \forall x : P(x, f(x))$ folgern.

Die Voraussetzung, dass y nur auf der linken Seite von elementaren Aussagen und nicht als Teil eines funktionalen Ausdrucks auftritt, dient natürlich dazu, dass die folgende Substitution von y durch $f(x)$ nur syntaktisch erlaubte Aussagen produziert. Dass dies keine wesentliche Einschränkung ist, sieht man daran, dass eine beliebige Aussage $P(x, y)$ gleichwertig ist zu

$$\exists y' : (y = y') \wedge (P(x, y')) ,$$

⁷engl. *axiom of choice*.

und in der letzteren, nachdem man diese in eine geeignete syntaktisch zugelassene Standardform umschreibt, y nur links und nicht in einem funktionalen Ausdruck auftritt.

Wie wir jetzt sehen werden, führt dieses Auswahlaxiom leider zu einem Widerspruch und kann daher letztlich in dieser vorläufigen Form nicht akzeptiert werden.

Russell'sches Paradoxon. Sei x eine Variable.

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{TND}} \rightarrow x(x) = x \vee x(x) \neq x \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{cc}
 x(x) = x & x(x) \neq x \\
 \text{Regel 19} \mid & \mid \text{Regel 18} \\
 \exists y : y \neq x & \exists y : y = x \\
 \mid & \mid \\
 \exists y : y \neq x \wedge x(x) = x & \exists y : y = x \wedge x(x) \neq x \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \exists y : (y \neq x \wedge x(x) = x) \vee (y = x \wedge x(x) \neq x)
 \end{array}
 \end{array}$$

Nach Regel 25 folgt also insgesamt

$$\forall x \exists y : (y \neq x \wedge x(x) = x) \vee (y = x \wedge x(x) \neq x)$$

Nach der vorläufigen Version des Auswahlaxiom erhalten wir

$$\exists f \forall x : (f(x) \neq x \wedge x(x) = x) \vee (f(x) = x \wedge x(x) \neq x)$$

Also dürfen wir nach Regel 24 ein f' einführen, sodass

$$\forall x : (f'(x) \neq x \wedge x(x) = x) \vee (f'(x) = x \wedge x(x) \neq x)$$

Nach Regel 26 dürfen wir insbesondere f' für x einsetzen und erhalten

$$(f'(f') \neq f' \wedge f'(f') = f') \vee (f'(f') = f' \wedge f'(f') \neq f')$$

Daraus folgt mit trivialer Fallunterscheidung

$$f'(f') \neq f' \wedge f'(f') = f'$$

Daraus folgt $f'(f') \neq f'$ und $f'(f') = f'$ und somit, durch ein leichtes Substitutionsargument, $f' \neq f'$ und $f' = f'$. Dies ist ein Widerspruch.

Für eine widerspruchsfreie Theorie müssen wir also ein modifiziertes Auswahlaxiom fordern. Man kann einerseits Funktionen einführen, die nicht

gleichzeitig Objekte sind, sogenannte Klassenfunktionen. Wir brauchen diese in der Syntax umständlichen Klassenfunktionen aber erstmal nicht, sondern formulieren eine Variante des Auswahlaxioms, die nur solche Funktionen braucht, die selbst wieder Objekte sind. Klassenfunktionen können später eingeführt werden, eine Spracherweiterung auf die wir aber nicht weiter eingehen werden.

◇ ————— Ende Vorlesung 3, 14.10.2014 ————— ◇

Das Problem bei unserer bisherigen Version des Auswahlaxioms ist, dass es auf zu allgemeine Weise neue Funktionen einführt. Eine zuvor bewiesene allquantifizierte Aussage produziert per Auswahlaxiom ein neues Objekt, für das der bereits gezeigte Beweis nicht gilt. Das ist ein Selbstreferenzproblem ähnlich dem umgangssprachlichen Paradoxon „Dieser Satz ist falsch“. Um Paradoxa zu vermeiden, müssen wir das Auswahlaxioms beschränken. Zur Motivation führen wir zunächst einige Sprechweisen zu Funktionen ein. Nach TND gilt für alle x ,

$$f(x) = f \vee f(x) \neq f$$

Der „objektartige Fall“ $f(x) = f$ entspricht im normalen Sprachgebrauch der Aussage „ $f(x)$ ist nicht definiert“. Andererseits ist $f(x) \neq f$ der „funktionsartige Fall“. Wenn dies gilt sagen wir, dass x im *Definitionsereich* von f ist. Trotz der Unterscheidung zwischen „objektartigem Fall“ und „funktionsartigem Fall“ soll nicht vergessen werden, dass alle Objekte auch Funktionen sind und umgekehrt. Es gibt also nur eine Sorte von Variablen, die aber je nach Position in einer Aussage verschiedene interpretative Aspekte haben. Im folgenden werden wir wesentlich die Symmetrie zwischen $=$ und \neq brechen. Es ist also an der Zeit, die Reflexivität, die wir bisher nur aus Symmetrie und der Bequemlichkeit halber angenommen haben, als Regel zu fordern. Wir fordern gleich zwei ganz ähnlich aussehende Regeln:

Regel 33 (Reflexivität).

$$\exists x : x = x$$

Regel 34 (Objektartige Funktion).

$$\exists f \forall x : f(x) = f$$

Wie wir gesehen haben, können wir aus der ersten Regel $\forall x : x = x$ folgern.

Regel 35 (Auswahlaxiom, AC). Sei $\forall x \exists y : P(x, y)$ bewiesen und so dass y in $P(x, y)$ nur an erster Stelle einer Elementaraussage vorkommt und nicht in einem funktionalen Ausdruck. Sei g eine Funktion. Dann folgern wir

$$\exists f \forall x : (P(x, f(x)) \wedge f(x) \neq f \wedge g(x) \neq g) \vee (f(x) = f \wedge g(x) = g)$$

Die Funktion f , deren Existenz das Auswahlaxiom garantiert, ist also in ihrem Definitionsbereich festgelegt auf einen solchen, der bereits von einer bereits bekannten Funktion g angenommen wird.

Von der Funktion g benötigt man nur den Definitionsbereich, es ist aber für das Auswahlaxiom nicht weiter interessant, welche Werte g annimmt. Man kann daher oft für g spezielle Funktionen hernehmen.

Definition 1.20. Eine Funktion I heißt *Identitätsfunktion*, wenn

$$\forall x : I(x) = x \vee I(x) = I .$$

Identitätsfunktionen werden auch als Mengen bezeichnet. Wir schreiben $x \in I$ falls $I(x) \neq I$ und $x \notin I$ falls $I(x) = I$.

Satz 1.21. Ist g eine Funktion, so gibt es eine Identitätsfunktion I mit

$$\forall x : (I(x) \neq I \wedge g(x) \neq g) \vee (I(x) = I \wedge g(x) = g)$$

In Worten, g und I haben denselben Definitionsbereich. Bei der Anwendung des Auswahlaxioms kann also g durch I ersetzt werden.

Beweis. Wir wenden das Auswahlaxiom an mit der Aussage $\forall x \exists y : y = x$ und der Funktion g . Wir erhalten eine Funktion I mit

$$\forall x : (I(x) = x \wedge I(x) \neq I \wedge g(x) \neq g) \vee (I(x) = I \wedge g(x) = g)$$

Dies ist die gesuchte Funktion, man zeigt leicht die gewünschten Eigenschaften. □

Das Auswahlaxiom liest sich noch sehr umständlich. Zur Vereinfachung führen wir neue Notation ein. Wir schreiben $(f : I \rightarrow)$ falls I den Definitionsbereich von f beschreibt, d.h. $(f : I \rightarrow)$ steht für die Aussage

$$\forall x : (I(x) = x \wedge I(x) \neq I \wedge f(x) \neq f) \vee (I(x) = I \wedge f(x) = f)$$

Satz 1.22 (Auswahlaxiom, Kurzfassung für Identitätsfunktionen). *Sei $\forall x \exists y : P(x, y)$ bewiesen, mit P wie im obigen Auswahlaxiom, und sei I eine Identitätsfunktion. Dann folgern wir*

$$\exists (f : I \rightarrow) \forall x \in I : P(x, f(x))$$

Diese Kurzfassung des Auswahlaxioms zeigt die Nützlichkeit des Mengenbegriffes. Der Beweis ist eine Übung. Wir bemerken, dass als Voraussetzung die schwächere Aussage $\forall x \in I \exists y : P(x, y)$ ausreicht.

Um das Auswahlaxiom also überhaupt sinnvoll anwenden zu können, müssen wir die Existenz von genügend vielen Funktionen sichern. Dabei muss jedoch stets darauf geachtet werden, dass keine Inkonsistenzen von der Bauart des Russell'schen Paradoxons eingeführt werden. Die Regeln, die wir hierzu einführen werden im Wesentlichen den Axiomen des *Zermelo-Fraenkel Axiomensystems* (*ZF*) der Mengenlehre entsprechen. In Kombination mit dem Auswahlaxiom spricht man auch vom *Zermelo-Fraenkel System mit Auswahlaxiom* (*ZFC*⁸).

Wir führen eine weitere Notation ein. Sei f eine Funktion und I und J zwei Identitätsfunktionen. Wir schreiben $f : I \rightarrow J$ falls $(f : I \rightarrow)$ und

$$\forall x \in I : f(x) \in J$$

wobei $f(x) \in I$ definiert ist als $\exists y : (f(x) = y) \wedge (y \in I)$. Beachte dass J den Bildbereich von f enthält, d.h. alle Objekte der Form $f(x)$ mit $f(x) \neq f$, aber durchaus auch Objekte enthalten kann, die nicht im Bildbereich von f liegen.

Regel 36 (Ersetzungsaxiom, engl.: replacement). Sei f eine Funktion und I Identitätsfunktionen mit $(f : I \rightarrow)$. Dann existiert eine Identitätsfunktion J mit $f : I \rightarrow J$ und

$$\forall y \in J \exists x \in I : f(x) = y$$

Die Menge J ist also gerade der Bildbereich von f . Wir haben also nun per Ersetzungsaxiom Bildbereiche von Funktionen als neue Definitionsbereiche, auf die wir das Auswahlaxiom anwenden können. Der Bildbereich einer Funktion kann manipuliert werden, indem man zuvor das Auswahlaxiom auf die Funktion anwendet. Allerdings hat der Bildbereich intuitiv gesprochen den Nachteil, kleiner zu sein als der Definitionsbereich einer Funktion. Wir können also noch keine großen Definitionsbereiche erzeugen. In der Tat haben wir nach bisherigem Regelwerk noch überhaupt keine Funktionen außer dem reinen Objekt nach Regel 34, da sowohl Auswahlaxiom als auch Ersetzungsaxiom aus einem reinen Objekt nur wieder ein reines Objekt produzieren kann.

Die erste große Menge wird durch das folgende Axiom erzeugt.

Regel 37 (Peano Axiome oder Unendlichkeitsaxiom, engl.: infinity). Es gibt ein Objekt 0 und eine Funktion ν mit den folgenden fünf Eigenschaften:

1. $\nu(0) \neq \nu$ (0 ist im Definitionsbereich von ν .)

⁸Das C in *ZFC* steht für *choice*.

2. $\forall x : \nu(x) \neq 0$ (0 ist nicht im Bildbereich von ν .)
3. $\forall x \forall y : \nu(x) = \nu \vee \nu(x) \neq \nu(y) \vee x = y$ (ν ist *injektiv*⁹)
4. $\forall x \forall y : \nu(x) \neq y \vee y = \nu \vee \nu(y) \neq \nu$ (Wenn y im Bild von ν ist, dann ist y im Definitionsbereich von ν .)
5. Ist f eine Funktion mit

$$\forall x \forall y : f(0) \neq f \wedge (\nu(x) = \nu \vee f(x) = f \vee \nu(x) \neq y \vee f(y) \neq f), \quad (2)$$

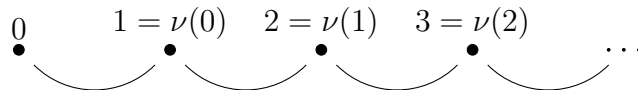
dann gilt

$$\forall x : f(x) \neq f \vee \nu(x) = \nu. \quad (3)$$

(Induktionsprinzip)

Durch konjunktive Verknüpfung dieser fünf Aussagen und anschließender Umformung kann man diese Regel natürlich als Aussage unserer formalen Syntax schreiben. Dies würde aber zu einer sehr langen, schwer leserlichen Aussage führen.

Wir geben $\nu(0)$ die Bezeichnung 1, d.h. $\nu(0) = 1$ *per Definition*. Dann besagt die erste Eigenschaft gerade $1 \neq 0$. Nach Eigenschaft 4 ist 1 im Definitionsbereich von ν . Wir definieren 2 als $\nu(1)$. $2 \neq 1$ folgt wegen Eigenschaft 3 aus $1 \neq 0$. Diesen Prozess können wir nun fortführen, um 3, 4, 5, usw. zu definieren.



Wir nennen die Objekte im Definitionsbereich von ν die natürlichen Zahlen. Eigenschaft 5 enthält das Prinzip der *vollständigen Induktion*. Angenommen wir wollen beweisen, dass alle natürlichen Zahlen im Definitionsbereich einer gegebenen Funktion f sind. Diese Funktion könnte zum Beispiel vorher mithilfe des Aussonderungsaxioms so konstruiert sein, dass Zugehörigkeit zu ihrem Definitionsbereich gerade eine uns anderweitig interessierende Aussage reflektiert. Dass alle natürlichen Zahlen im Definitionsbereich von f liegen, ist gerade Aussage (3). Es reicht dann nach Eigenschaft 5, Aussage (2) zu beweisen. Zu zeigen wäre dann erstens, dass 0 im Definitionsbereich von f ist, und außerdem dass für alle natürlichen Zahlen x , die im Definitionsbereich von f sind, auch $\nu(x)$ im Definitionsbereich von f ist. Eigenschaft 5 besagt also unter anderem, dass der Definitionsbereich von ν nicht zu groß ist und man durch den Induktionsprozess alle natürlichen Zahlen erreicht. Die Eigenschaften von ν werden auch *Peano-Axiome* genannt.

⁹d.h. verschiedene x, y im Definitionsbereich produzieren verschiedene $\nu(x), \nu(y)$.

Definition 1.23. Der Definitionsbereich von ν wird bezeichnet mit \mathbb{N} und heißt *Menge der natürlichen Zahlen*. Die Identitätsfunktion auf \mathbb{N} wird mit $I_{\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Regel 38 (Extensionalität, engl.: extension). Seien f, g Funktionen mit

$$\forall x : (f(x) = g(x) \wedge f(x) \neq f \wedge g(x) \neq g) \vee (f(x) = f \wedge g(x) = g).$$

Dann gilt $f = g$.

Dieses Axiom besagt, dass zwei Funktionen gleich sind, wenn sie den gleichen Definitionsbereich besitzen und sie auf diesem Definitionsbereich die gleichen Werte annehmen. Eine Konsequenz aus dem Extensionalitätsaxiom ist zum Beispiel, dass es höchstens ein reines Objekt geben kann. Nehmen wir nämlich an, f und g seien zwei reine Objekte. Das heißt, $\forall x : g(x) = g$ und $\forall x : f(x) = f$. Dann folgt aus Regel 38 direkt $f = g$.

◇ ————— Ende Vorlesung 4, 16.10.2014 ————— ◇

1.5 Die natürlichen Zahlen

Wir haben eine minimale Syntax angegeben, mithilfe derer sich im Prinzip alle Aussagen der Mathematik in der Form

Quantoren : konj./disj. Aussage

schreiben lassen. Da dies recht schnell unübersichtlich wird, führt man eine große Anzahl an Abkürzungen und Schreibweisen, von denen wir jetzt einige diskutieren.

Der Definitionsbereich einer Funktion f wird mit $\text{Dom}(f)$ bezeichnet. Wir schreiben $x \in \text{Dom}(f)$, wenn $f(x) \neq f$. Das Bild einer Funktion wird mit $\text{Ran}(f)$ bezeichnet. Entsprechend bedeutet $x \in \text{Ran}(f)$, dass $\exists y : f(y) = x \wedge x \neq f$.

Für zwei Mengen (Identitätsfunktionen) A, B schreiben wir $A \subset B$, falls $x \in A \Rightarrow y \in B$, i.e.

$$A(x) = A \vee B(x) \neq B$$

Mit diesen Definitionen können wir die Peano Axiome aus Regel 37 in einer gebräuchlicheren Form wiedergeben.

Peano Axiome. Es gibt ein Element 0 und eine Funktion ν , sodass

1. $0 \in \text{Dom}(\nu)$,
2. $0 \notin \text{Ran}(\nu)$,
3. ν ist injektiv,
4. $\text{Ran}(\nu) \subset \text{Dom}(\nu)$,
5. ist f Funktion, sodass $0 \in \text{Dom}(f)$ und

$$(x \in \text{Dom}(f) \wedge x \in \text{Dom}(\nu)) \Rightarrow \nu(x) \in \text{Dom}(f),$$

dann folgt $\text{Dom}(\nu) \subset \text{Dom}(f)$.

Weiter ist $f : A \rightarrow B$ eine Schreibweise für die beiden Aussagen $A = \text{Dom}(f)$ und $\text{Ran}(f) \subset B$. In der minimalen Syntax ausgedrückt heißt dies, dass die folgenden Aussagen gelten:

$$\forall x : (A(x) \neq A \wedge f(x) \neq f) \vee (A(x) = A \wedge f(x) = f)$$

$$\forall x \forall y : f(x) \neq y \vee y = f \vee B(y) \neq B$$

Satz 1.24. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Identitätsfunktion (Menge) I mit $I \subset \mathbb{N}$, sodass für alle $x \in \mathbb{N}$*

1. $x \in I \Rightarrow \nu(x) \in I \vee \nu(x) = n$
2. $x \notin I \Rightarrow \nu(x) \notin I$
3. $n \notin I$
4. $n = 0 \vee 0 \in I$

Die Menge I ist intuitiv genau die Menge der natürlichen Zahlen bis ausschließlich n . Sie ist durch n eindeutig bestimmt, wie der folgende Satz aussagt.

Satz 1.25 (Eindeutigkeit für I). *Erfüllen I und I' die obigen Aussagen für ein festes $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $I = I'$.*

Beide Sätze in Kombination bilden unser erstes Beispiel für eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage, wie man sie in der Mathematik an vielen Stellen antrifft. Die Existenz erlaubt uns, ein entsprechendes Objekt einzuführen, während die Eindeutigkeit uns erlaubt, Gleichheitsaussagen für dieses Objekt zu erhalten.

Der Beweis dieser Sätze bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Wir sind versucht, das I mit einem von n abhängigen Bezeichner zu versehen. Die Rechtfertigung hierfür liefert das Auswahlaxiom. Der obige Existenzsatz beginnt formal mit den Quantoren $\forall n \in \mathbb{N} \exists I$ und listet dann diverse Eigenschaften von I . Per Auswahlaxiom bekommen wir eine Funktion \mathcal{I} mit Definitionsbereich \mathbb{N} , sodass die Funktion $\mathcal{I}(n)$ für alle n die im Satz für I formulierten Aussagen erfüllt.

Ein Ausschreiben dieser Aussage legt Ausdrücken der Form $\mathcal{I}(n)(x)$ nahe. Diese sind aber in unserer minimalen Syntax nicht definiert. Stattdessen handelt es sich um eine neue Schreibweise.

$$f(x)(y) = z \quad \text{bedeutet} \quad \exists a : f(x) = a \wedge a(y) = z$$

Dies ist die Notation für *Funktionen in zwei Variablen*. Entsprechend lassen sich auch Funktionsausdrücke mit mehr Variablen in die minimale Syntax übersetzen. Die *Komposition* von Funktionen können wir ganz ähnlich definieren.

$$f(g(x)) = z \quad \text{bedeutet} \quad \exists a : f(a) = z \wedge g(x) = a$$

Wir bemerken hier auch, dass man funktionale Ausdrücke gleichsetzen kann.

$$f(x) = g(z) \quad \text{bedeutet} \quad \exists a : f(x) = a \wedge g(z) = a$$

In ähnlicher Weise kann man Ausdrücke mit höherer Komplexität definieren. Funktionen mit Definitionsbereich \mathbb{N} nennt man auch *Folgen*. Für Folgen schreibt man oft f_n statt $f(n)$. Zum Beispiel werden wir ab jetzt $\mathcal{I}(n) = I_n$ schreiben.

Der folgende Satz vergleicht I_n mit $I_{\nu(n)}$. Im Wesentlichen besagt er in formaler Weise, dass I_n und $I_{\nu(n)}$ bis auf das Argument n alle Argumente gleich behandeln. Dies ist eine nützliche Information in Induktionsbeweisen.

Satz 1.26. *Für die Folge von Funktionen I_n gelten die folgenden Aussagen.*

$$\begin{aligned} \forall x : I_0(x) &= I_0 \\ \forall n \forall x : (x \in \text{Dom}(I_n) \wedge x \in \text{Dom}(I_{\nu(n)}) \wedge x \neq n) \\ &\quad \vee (x \notin \text{Dom}(I_n) \wedge x \notin \text{Dom}(I_{\nu(n)}) \wedge x \neq n) \\ &\quad \vee (x \in \text{Dom}(I_{\nu(n)}) \wedge x = n) \end{aligned}$$

Beweis. Übung. □

Oft möchte man Folgen durch rekursive Vorschriften definieren. Die Existenz einer Folge, die der Iterationsvorschrift genügt muss jedoch erst bewiesen werden.

Satz 1.27 (Rekursion/Iteration). Sei f eine Funktion mit $\text{Ran}(f) \subset \text{Dom}(f)$ und $p \in \text{Dom}(f)$. Dann gibt es eine Folge $h : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f)$ mit

1. $h(0) = p$ und
2. $\forall x \in \mathbb{N} : h(\nu(x)) = f(h(x))$.

Die Funktion h ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Hierbei ist f die Rekursionsvorschrift, p der Anfangswert und h die resultierende Folge. Tatsächlich erhalten wir nach den Eigenschaften 1 und 2:

$$\begin{aligned} h(0) &\stackrel{1.}{=} p, \\ h(1) &\stackrel{\text{Def.}}{=} h(\nu(0)) \stackrel{2.}{=} f(h(0)) \stackrel{h(0)=p}{=} f(p), \\ h(2) &\stackrel{\text{Def.}}{=} h(\nu(1)) \stackrel{2.}{=} f(h(1)) \stackrel{h(1)=f(p)}{=} f(f(p)), \\ h(3) &= f(f(f(p))) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beweis(skizze) der Existenzaussage von Satz 1.27. Die folgende Aussage können wir per Induktion (Regel 37) beweisen.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \exists g : \text{Dom}(g) = I_n \wedge \\ \text{Ran}(g) \subset \text{Dom}(f) \wedge (g(0) = p \vee n = 0) \wedge \\ (\forall x \in I_n : g(\nu(x)) = f(g(x))) \end{aligned}$$

Wir können auch beweisen, dass diese Funktion g eindeutig ist. Nach Auswahlaxiom erhalten wir daraus eine Folge von Funktionen g_n mit den entsprechenden Eigenschaften. Die gesuchte Funktion h ist nun gerade $g_{\nu(n)}(n)$. Wenn wir die gewünschten Aussagen für h beweisen wollen, müssen wir $g_{\nu(n)}$ mit g_n vergleichen, hierbei ist die gerade erwähnte Eindeutigkeit wichtig, die insbesondere impliziert dass die Einschränkung von $g_{\nu(n)}$ auf I_n gerade g_n ist. \square

Beweis der Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.27. Seien h, h' Funktionen wie im Satz (für dieselben p und f). Da $\text{Dom}(h) = \text{Dom}(h') = \mathbb{N}$ nach Definition, brauchen wir nach dem Extensionalitätsaxiom bloß $h(n) = h'(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Dann folgt $h = h'$. Wir zeigen dies per Induktion. Beweise durch Induktion sind immer in drei Teile gliedern: Induktionsanfang, Induktionsannahme und Induktionsschritt.

Induktionsanfang. $n = 0$. $h(0) \stackrel{1.}{=} p \stackrel{1.}{=} h'(0)$.

Induktionsannahme. Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $h(n) = h'(n)$.

Induktionsschritt. Zu zeigen ist $h(\nu(n)) = h'(\nu(n))$. Dazu verwenden wir die definierende Eigenschaft 2 von h und die Induktionsannahme.

$$h(\nu(n)) \stackrel{2.}{=} f(h(n)) \stackrel{\text{Ind.}}{=} f(h'(n)) \stackrel{2.}{=} h'(\nu(n))$$

Nach dem Induktionsprinzip (Regel 37) ist damit der Beweis abgeschlossen. \square

Die Rekursion können wir insbesondere auf die Funktion $f = \nu$ mit einem Startwert $p = n \in \mathbb{N}$ anwenden. Für die erhaltene Funktion h verwenden wir die übliche Notation $\nu^m(n) = h(m)$. Man bemerke, dass sich in dieser Bezeichnung implizit sowohl die Eindeutigkeit von h , als auch das Auswahlaxiom verbergen. Die iterierte Nachfolgefunktion ν^m können wir verwenden, um die Addition natürlicher Zahlen zu definieren.

Definition 1.28 (Addition in \mathbb{N}). Für $n, m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$n + m := \nu^m(n)$$

Die Doppelpunkte vor dem Gleichheitszeichen sind kennzeichnend für eine Definition und werden manchmal zur Abgrenzung oder Klarstellung verwendet.

Alle bekannten Eigenschaften der Addition lassen sich nun aus der Definition ableiten.

Satz 1.29 (Eigenschaften der Addition). *Für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ gelten*

- $n + 0 = n$ und $0 + n = n$ (neutrales Element)
- $n + m = m + n$ (Kommutativgesetz)
- $(n + m) + k = n + (m + k)$ (Assoziativgesetz)
- $n + k = m + k \Rightarrow n = m$ (Auslöschungsgesetz)

Beweis. Die erste Gleichung folgt direkt aus der Definition: $n+0 = \nu^0(n) = n$. Zum Beweis von $0 + n = n$ müssen wir eine Induktion durchführen.

Induktionsanfang. $n = 0$. $0 + 0 \stackrel{\text{Def.}}{=} \nu^0(0) \stackrel{1.}{=} 0$.

Induktionsannahme. Wir nehmen an, dass $0 + n = n$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt. Zu zeigen ist $0 + \nu(n) = \nu(n)$. Es gilt

$$0 + \nu(n) \stackrel{\text{Def.}+}{=} \nu^{\nu(n)}(0) \stackrel{2.}{=} \nu(\nu^n(0)) \stackrel{\text{Def.}+}{=} \nu(0 + n) \stackrel{\text{Ind.}}{=} \nu(n)$$

Damit haben wir $0 + n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Als nächstes beweisen wir noch das Kommutativgesetz. Zu zeigen ist also

$$\nu^m(n) = \nu^n(m)$$

Wir verwenden dazu die Eindeutigkeitsaussage aus Satz 1.27. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ zeigen wir, dass die Funktion $h'(m) := \nu^n(m)$ die Eigenschaften aus Satz 1.27 mit $f = \nu$ und $p = n$ erfüllt. Die erste Eigenschaft gilt, da

$$h'(0) \stackrel{\text{Def.}h'}{=} \nu^n(0) \stackrel{\text{Def.}+}{=} 0 + n \stackrel{\text{s.o.}}{=} n$$

Zum Nachweis der zweiten Eigenschaft ist zu zeigen:

$$\forall m \in \mathbb{N} : h'(\nu(m)) = \nu(h'(m)) \quad (4)$$

Setzen wir hier die Definition von h' ein, wird die Behauptung zu

$$\forall m \in \mathbb{N} : \nu^n(\nu(m)) = \nu(\nu^n(m))$$

Um dies für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, führen wir wieder eine Induktion nach n durch.

Induktionsanfang. $n = 0$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\nu^0(\nu(m)) \stackrel{1.}{=} \nu(m) \stackrel{1.}{=} \nu(\nu^0(m))$$

Induktionsannahme. Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\forall m \in \mathbb{N} : \nu^n(\nu(m)) = \nu(\nu^n(m))$$

Induktionsschritt. Zu zeigen ist

$$\forall m \in \mathbb{N} : \nu^{\nu(n)}(\nu(m)) = \nu(\nu^{\nu(n)}(m))$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\nu^{\nu(n)}(\nu(m)) \stackrel{2.}{=} \nu(\nu^n(\nu(m))) \stackrel{\text{Ind.}}{=} \nu(\nu(\nu^n(m))) \stackrel{2.}{=} \nu(\nu^{\nu(n)}(m))$$

Nach dem Induktionsprinzip ist damit der Beweis von (4) abgeschlossen. Wie bereits erwähnt folgt das Kommutativgesetz nun aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.27.

$$n + m \stackrel{\text{Def.}+}{=} \nu^m(n) \stackrel{\text{Satz 1.27}}{=} h'(m) \stackrel{\text{Def.}h'}{=} \nu^n(m) \stackrel{\text{Def.}+}{=} m + n$$

Die Beweise des Assoziativ- und Auslöschungsgesetzes bleiben dem Leser als Übungsaufgabe empfohlen. \square

Wir definieren nun die Ordnung auf den natürlichen Zahlen.

Definition 1.30. Wir schreiben $n < m$, falls $I_m(n) \neq I_m$. Wir schreiben $n \leq m$, falls $n < m \vee n = m$.

Satz 1.31. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq m$ genau dann, wenn $\exists k \in \mathbb{N} : n + k = m$.

Es gelten außerdem die folgenden Regeln, die man ähnlich zu den Regeln der Addition beweisen kann.

Satz 1.32. Für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt

- $(n \leq m \wedge m \leq k) \Rightarrow n \leq k$, (Transitivität)
- $n \leq m \vee m \leq n$, sowie
 $(n \leq m \wedge m \leq n) \Rightarrow m = n$ (Vollständigkeit).
- $n \leq m$ genau dann wenn $n + k \leq m + k$ (Verträglichkeit mit Addition).

◇————— Ende Vorlesung 5, 21.10.2014 —————◇

1.6 Endliche und unendliche Mengen

Das Hotel von Hilbert ist sehr groß, es hat Zimmer, die durch die natürlichen Zahlen durchnummeriert sind, und jede natürliche Zahl entspricht genau einem Zimmer. Das Hotel ist gerade voll, da kommt ein neuer Gast vorbei. Hilbert findet eine Lösung: er bittet jeden anwesenden Gast, von seinem Zimmer n auf das nächste Zimmer $n + 1$ umzuziehen. Dem neuen Gast bietet er dann Zimmer 0 an.

Diese Möglichkeit des Platzmachens stellt sich als wesentliche Eigenschaft unendlicher Mengen dar, die wir jetzt formal diskutieren wollen.

Injektive Funktionen bilden ungleiche Elemente im Definitionsbereich der Funktion auf ungleiche Elemente ab, d.h.

Definition 1.33. Sei f eine Funktion mit $f : A \rightarrow B$. Dann heißt f *injektiv*, falls

$$\forall x \in A \forall y \in A : f(x) \neq f(y) \vee x = y.$$

Eine Funktion heisst surjektiv auf eine Menge B , falls die Menge B gleich dem Bildbereich der Funktion ist. Beachte, dass die Aussage $f : A \rightarrow B$ nur impliziert, dass der Bildbereich in B enthalten ist.

Definition 1.34. Sei f eine Funktion mit $f : A \rightarrow B$. Dann heißt f *surjektiv* auf B , falls

$$\forall x \in B \exists y \in A : f(y) = x.$$

Die ersten vier Peanoaxiome sagen gerade aus, dass die Abbildung $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injektiv aber nicht surjektiv ist.

Im Gegensatz dazu haben wir

Satz 1.35. *Jede Injektion $f : I_n \rightarrow I_n$ ist surjektiv.*

Wir beweisen dazu zuerst den verwandten Satz:

Satz 1.36. *Ist n eine natürliche Zahl, so gibt es keine Injektion $f : I_{n+1} \rightarrow I_n$.*

Beweis von Satz 1.36. Induktion nach n .

Induktionsanfang. Sei $n = 0$. Beweis durch Widerspruch: wir nehmen an, dass es eine Injektion

$$f : I_1 \rightarrow I_0$$

gibt. Dann ist I_1 der Definitionsbereich von f und daher $0 \in \text{Dom}(f)$. Da I_0 den Bildbereich enthält, gilt $f(0) \in I_0$. Aber das ist ein Widerspruch, da I_0 leer ist.

Induktionsannahme. Sei $n \in \mathbb{N}$, so dass es keine Injektion

$$g : I_{n+1} \rightarrow I_n$$

gibt.

Induktionsschritt. Zu beweisen: es gibt keine Injektion

$$f : I_{n+2} \rightarrow I_{n+1}.$$

Beweis durch Widerspruch. Annahme: es gibt eine Injektion

$$f : I_{n+2} \rightarrow I_{n+1}.$$

Fall 1 : $\forall z \in I_{n+1}, f(z) \neq n$.

Definiere $g : I_{n+1} \rightarrow I_n$ durch $g(z) = f(z)$.

- g bildet tatsächlich nach I_n ab, nach Fallannahme.
- g ist injektiv: falls $x, y \in I_{n+1}$ und $x \neq y$, dann $f(x) \neq f(y)$, da f injektiv ist, also $g(x) \neq g(y)$ nach Definition von g .

Widerspruch zur Induktionsannahme.

Fall 2 : $\exists x \in I_{n+1}, f(x) = n$.

Wegen Injektivität von f ,

$$x \neq n + 1 \Rightarrow f(x) \neq f(n + 1).$$

Setze $y = f(n + 1)$, $y \neq n$. Definiere $g : I_{n+1} \rightarrow I_n$ wie folgt:

$$\begin{cases} g(z) = f(z) & \text{falls } z \neq x. \\ g(z) = y & \text{falls } z = x. \end{cases}$$

- g bildet nach I_n ab. Falls $z \neq x$,

$$g(z) = f(z) \neq f(x) = n.$$

Falls $z = x$,

$$y = f(n + 1) \neq f(x) = n.$$

- g Injektion. Sei $z \neq z'$. Falls $z \neq x, z' \neq x$,

$$g(z) = f(z) \neq f(z') = g(z')$$

nach Definition von g . Falls $z = x, z' \neq x$,

$$g(z) = g(x) = y = f(n + 1) \neq f(z') = g(z').$$

Widerspruch zur Annahme.

□

Beweis von Satz 1.35. **Fall 1:** $n = 0$. Sei $f : I_0 \rightarrow I_0$. Für die Surjektivität ist zu zeigen:

$$\forall x \in I_0, \exists y \in I_0 : x = f(y).$$

Es ist äquivalent zu zeigen, dass

$$\forall x : (x \notin I_0) \vee (\exists y \in I_0 : x = f(y)).$$

Das ist immer richtig, weil I_0 leer ist.

Fall 2: $n \neq 0$, also $n = m + 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $f : I_n \rightarrow I_n$ injektiv.

Fall 2a: $\forall x \in I_n, f(x) \neq m$. Dann ist $f : I_n \rightarrow I_m$ injektiv. Widerspruch zu Satz 1.36.

Fall 2b: $\exists x \in I_n, f(x) = m$. Beweis durch Widerspruch. Annahme: f ist nicht surjektiv. Das impliziert

$$\exists y \in I_n \forall x \in I_n : f(x) \neq y.$$

Wähle ein $y \in I_n$ entsprechend. Definiere $g : I_n \rightarrow I_m$, sodass

$$\begin{cases} g(z) = y & \text{falls } z = x. \\ g(z) = f(z) & \text{falls } z \neq x. \end{cases}$$

Dann kann man zeigen, dass g eine Injektion ist. Widerspruch zu Satz 1.36.

□

Definition 1.37. $f : A \rightarrow B$ heißt *bijektiv* auf B , falls f injektiv ist und surjektiv auf B .

Satz 1.38. Ist $f : A \rightarrow B$ bijektiv, so gibt es $g : B \rightarrow A$ mit

$$\begin{cases} \forall x \in A : g(f(x)) = x. \\ \forall y \in B : f(g(y)) = y. \end{cases}$$

Darüber hinaus ist g eindeutig und bijektiv auf A . Die Funktion g wird Umkehrfunktion von f genannt.

Beweis. Surjektivität von f bedeutet, dass

$$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y. \quad (5)$$

Nach dem Auswahlaxiom, gibt es eine Funktion g mit Definitionsbereich B so dass

$$\forall y \in B : f(g(y)) = y.$$

Zu zeigen:

1. Die Funktion g bildet nach A ab: Sei $y \in B$, dann ist $y \neq f$ und es folgt aus $f(g(y)) = y$ dass $g(y) \in \text{Dom}(f)$.
2. Wir zeigen $\forall x \in A : g(f(x)) = x$. Sei $x \in A$, dann $f(x) \in B$. (5) impliziert $f(g(f(x))) = f(x)$.

$$f \text{ injektiv} \Rightarrow g(f(x)) = x.$$

3. Surjektivität und Injektivität von g . Übung.
4. Eindeutigkeit. Sei g wie oben, und zusätzlich sei auch $g' : B \rightarrow A$ mit

$$\begin{cases} \forall y \in B : f(g'(y)) = y. \\ \forall x \in A : g'(f(x)) = x. \end{cases}$$

Sei $y \in B$, dann folgt

$$f(g(y)) = y = f(g'(y)).$$

Injektivität von f impliziert, dass $g(y) = g'(y)$. Weil $\text{Dom}(g) = \text{Dom}(g') = B$, gilt nach dem Extensionalitätsaxiom $g = g'$.

□

Definition 1.39. Eine Menge M heißt *endlich*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : I_n \rightarrow M$ gibt.

Satz 1.40. M ist endlich genau dann wenn es ein n gibt, so dass für alle $f : I_n \rightarrow M$ gilt: f ist nicht injektiv.

Beweis. 1. Sei M endlich und wähle n so, dass $f : I_n \rightarrow M$ bijektiv ist. Sei $g : M \rightarrow I_n$ die Umkehrfunktion. Zu zeigen ist dass für jede Funktion $h : I_{n+1} \rightarrow M$ gilt dass h nicht injektiv ist. Beweis durch Widerspruch: Sei $h : I_{n+1} \rightarrow M$ injektiv. Schreibe

$$g \circ h(x) = g(h(x)).$$

Dann ist $g \circ h : I_{n+1} \rightarrow I_n$ injektiv (Übung!). Widerspruch zu Satz 1.36.

2. Sei M nicht endlich. Wir zeigen, dass es für alle n eine Funktion $f : I_n \rightarrow M$ gibt die injektiv ist. Beweis durch Induktion nach n . Der Fall $n = 0$ folgt, da eine Funktion mit leerem Definitionsbereich injektiv ist. Sei n gegeben und eine Funktion $f : I_n \rightarrow M$ die injektiv ist. Da M nicht endlich ist, ist f nicht bijektiv und daher nicht surjektiv:

$$\exists y \in M \forall x \in I_n : f(x) \neq y.$$

Definiere $f' : I_{n+1} \rightarrow M$ mit

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), & \text{falls } x \in I_n. \\ f'(x) = y, & \text{falls } x = n. \end{cases}$$

Dann kann man zeigen, dass $f' : I_{n+1} \rightarrow M$ injektiv ist.

□

Satz 1.41. *Ist M endlich, so gibt es keine Injektion $f : \mathbb{N} \rightarrow M$.*

Satz 1.42. *Ist M endlich, so ist jede Injektion $f : M \rightarrow M$ surjektiv.*

Die Beweise werden als Übung dem Leser überlassen.

Definition 1.43. Eine Menge M heißt *abzählbar*, falls sie endlich ist oder es eine Injektion $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ gibt. Eine Menge, die nicht abzählbar ist heißt *überabzählbar*.

Bis jetzt ist \mathbb{N} die größte Menge, die wir kennen. Existenz überabzählbarer Mengen kann man nicht aus den bisherigen Regeln schließen. Man führt dazu eine neue Regel ein:

Regel 39 (Potenzmenge). Sei f eine Funktion. Dann gibt es eine Funktion g mit

$$\forall x \exists y : (x(y) \neq y \wedge x(y) \neq x) \vee (x(y) \neq x \wedge f(y) = f) \vee (g(x) \neq g)$$

In Worten sagt diese Regel über g aus: Ist x eine Identitätsfunktion (Menge), und ist der Definitionsbereich von x in dem von f enthalten, so ist x im Definitionsbereich von g . Der Definitionsbereich von g enthält also alle Teilmengen des Definitionsbereiches von f . Das Potenzmengenaxiom kann auch so ausgedrückt werden, dass es für zwei Mengen I und J eine Menge K gibt, sodass die Aussage $f : I \rightarrow J$ gleichwertig ist zu $f \in K$.

In der Sprache der Mengenlehre bedeutet dieses Axiom, dass es für jede Menge M eine Menge N gibt, die mindestens alle Teilmengen von M enthält. Schränkt man die Menge mit Aussonderungen ein so dass sie genau die Teilmengen von M enthält, so ist nach dem Extensionalitätsaxiom N durch M eindeutig bestimmt. Die Menge N heißt *Potenzmenge* von M und wird im Folgenden mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet.

Satz 1.44 (Cantor). *Seien M eine Menge. Es gibt keine Surjektion $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ und keine Injektion $f : \mathcal{P}(M) \rightarrow M$.*

Der Beweis erfolgt durch das sogenannte *Cantor'sche Diagonalverfahren*. Für den Beweis sei auf die Literatur verwiesen. Dieser Satz besagt, dass die Potenzmenge einer Menge in einem gewissen Sinne immer strikt „größer“ (wir benutzen den Begriff „größer“ hier in dem Sinne des Satzes von Cantor), ist als die ursprüngliche Menge. Insbesondere erhalten wir durch Anwendung des Satzes auf $M = \mathbb{N}$ die Existenz einer überabzählbaren Menge, nämlich $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Um noch größere Mengen zu erhalten können wir jetzt die Bildung von Potenzmengen fortsetzen. Das Einführen einer weiteren Regel macht auch die Bildung von noch größeren Mengen als irgendeine der durch iterative Anwendung der Potenzmenge erhaltenen Mengen

$$\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \dots, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\dots \mathcal{P}(\mathbb{N}) \dots)), \dots$$

Regel 40 (Vereinigungsmenge). Sei f eine Funktion. Dann existiert g , sodass

$$\forall x \forall y : f(x) = f \vee x(y) = x \vee g(y) \neq g$$

In Worten ausgedrückt: Ist x im Definitionsbereich der Funktion f , und ist y im Definitionsbereich von x , so ist y im Definitionsbereich von g . In der Sprache der Mengenlehre sieht man f als eine Menge von Mengen, dann ist g eine Obermenge der Vereinigung aller der in f enthaltenen Mengen. Erneut kann man per Aussonderung eine Menge erhalten, die gleich der Vereinigungsmenge ist, die dann per Extensionalität eindeutig ist.

Für eine Menge \mathcal{M} schreibt man für die Vereinigungsmenge $\bigcup \mathcal{M}$.

Wendet man dies nun auf die Folge an deren n -ter Wert gerade die n -te Menge in der Liste $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \dots$, so ergibt die Vereinigungsmenge eine Menge, die größer ist als jede einzelne der Mengen in der Liste.

◇ ————— Ende Vorlesung 6, 23.10.2014 ————— ◇

2 Reelle Zahlen

2.1 Dyadische Zahlen

Zur Konstruktion der reellen Zahlen definieren wir als Zwischenschritt erst die *dyadischen Zahlen*. Dies sind Brüche der Form $\frac{n}{2^k}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$.

Im Folgenden sei A eine überabzählbare Menge, die wir bloß als Hilfsmenge benötigen.

Satz 2.1. Sei $X : \mathbb{N} \rightarrow A$ injektiv. Dann existiert $Y : \mathbb{N} \rightarrow A$ injektiv mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : X(n) = Y(n + n).$$

Diesen Satz werden wir nicht im Detail beweisen. Überabzählbarkeit wird unter anderem dazu verwendet, dass X nicht surjektiv sein kann, was offenbar notwendig ist da zum Beispiel $Y(1)$ nicht im Bild von X liegen darf. Des weiteren benötigt man in dem Beweis die Tatsache dass für keine n, n' sowohl $n + n = n + n'$ als auch $n \neq n'$ gilt, da sonst

$$X(n) = Y(n + n) = Y(n' + n') = X(n'),$$

im Widerspruch zur Injektivität von X . Diesen Aspekt des Beweises führen wir als einzigen weiter aus durch den folgenden Satz.

Satz 2.2. Die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = x + x$ ist injektiv.

Beweis von Satz 2.2. Ist $n + n = n' + n'$ für $n, n' \in \mathbb{N}$, dann brauchen wir nur zu zeigen, dass $n = n'$. Beweis durch Widerspruch:

Fall 1: $n \leq n'$. Dann existiert ein a , sodass $n + a = n'$. Also,

$$n + n = n + a + n + a.$$

Nach Kommutativ-, Assoziativ- und Auslöschungsgesetz haben wir $0 = a + a$. Das impliziert $a \leq 0$. Bemerke auch, dass

$$0 + a = 0 \Rightarrow 0 \leq a.$$

Deshalb $a = 0$, also auch $n = n'$.

Fall 2: $n' \leq n$. Gleich wie Fall 1.

□

Die Aussage des Satzes 2.1 ist schematisch von der Form

$$\forall X \exists Y \dots$$

und erlaubt daher eine Anwendung des Auswahlaxioms um eine Funktion Z zu definieren, die jeder Funktion X in der Menge aller Funktionen von \mathbb{N} nach A eine Funktion Y wie in dem Satz zuordnet.

Wir nehmen jetzt an, dass $\mathbb{N} \subset A$. Dann erfüllt insbesondere die Identitätsfunktion auf \mathbb{N} , die wir hier mit p bezeichnen wollen, die Aussage $p : \mathbb{N} \rightarrow A$. Dann definieren wir d rekursiv so dass $d(0) = p$ und für $d(k+1) = Z(d(k))$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir schreiben

$$d(k)(n) =: \frac{n}{2^k}.$$

Definition 2.3. Objekte von der Form $d(k)(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ heißen *dyadische Zahlen*.

Wir bezeichnen die Menge der dyadischen Zahlen mit

$$\mathbb{Y} := \{d(k)(n) : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}.$$

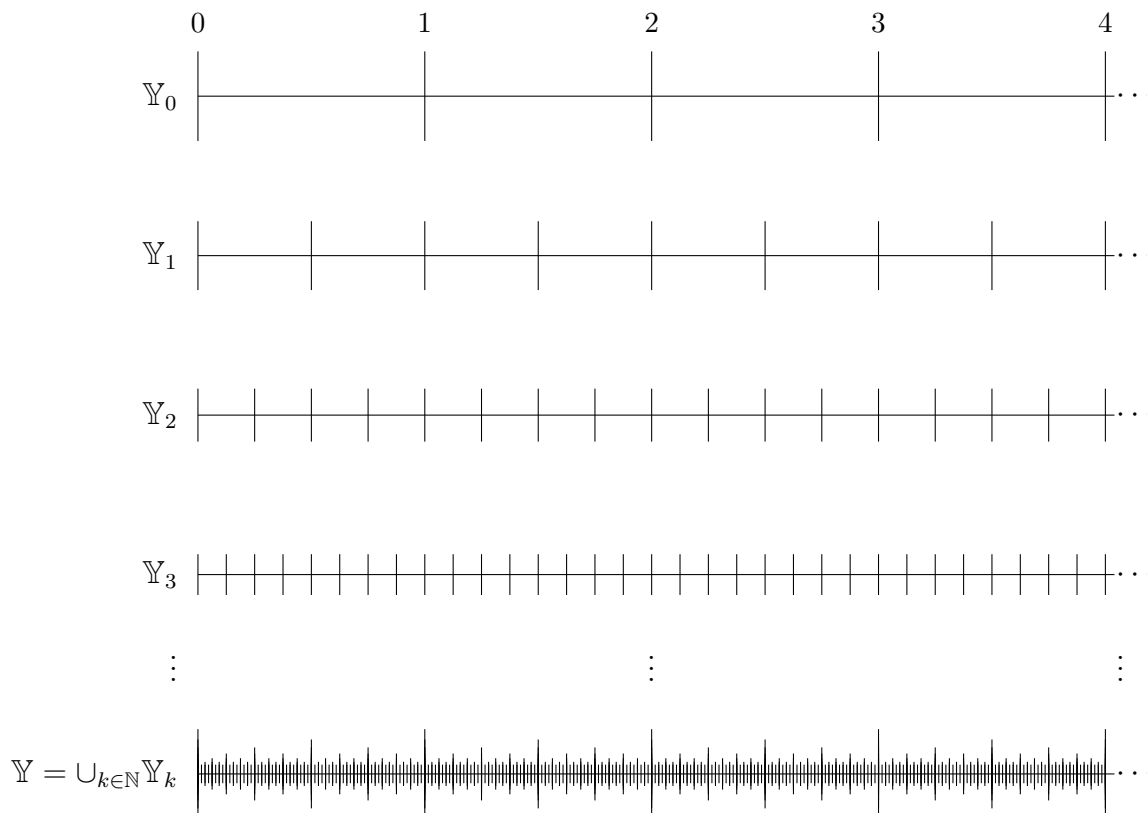
Für festes $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$\mathbb{Y}_k := \{d(k)(n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Deshalb haben wir $\mathbb{Y}_0 = \mathbb{N}$ und

$$\mathbb{Y} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Y}_k.$$

Die dyadischen Zahlen sollte man sich als ein sich mit steigendem k verdichtendes Gitter auf dem Zahlenstrahl vorstellen.



In der Darstellung repräsentieren die vertikalen Striche dyadische Zahlen. Die Strichlänge ist dabei umso kleiner, je größer k ist. Wir bemerken dass die obige Darstellung stark an einen amerikanischen Zollstock erinnert. In der Tat ist das “inch”-System auf dyadische Zahlen aufgebaut.

Nach unserer Konstruktion der dyadischen Zahlen gibt es auf \mathbb{Y} noch keine Struktur der Addition oder Ordnung, allerdings legt die obige Darstellung solche Strukturen nahe. Im Folgenden machen wir diese Intuition rigoros, indem wir systematisch die Addition und Ordnung auf den dyadischen Zahlen einführen.

Definition 2.4 (Addition). Seien $x \in \mathbb{Y}_k, y \in \mathbb{Y}_k$. Dann gibt es $n, n' \in \mathbb{N}$, sodass

$$x = d(k)(n), y = d(k)(n').$$

Wir definieren

$$x +_k y := d(k)(n + n').$$

Wir schreiben $x \leq_k y$ genau dann wenn $n \leq n'$.

Kommutativität, Assoziativität, und Auslöschung der Addition $+_k$, sowie Transitivität, Totalität und Antisymmetry der Ordnung \leq_k sowie Verträglichkeit von $+_k$ und \leq_k sind leicht zu zeigen, sie folgen sehr rasch aus den entsprechenden Eigenschaften der Addition und Ordnung für natürliche Zahlen.

Satz 2.5. *Es seien $k, k' \in \mathbb{N}$. Wenn $x \in \mathbb{Y}_k, x \in \mathbb{Y}_{k'}$ und $y \in \mathbb{Y}_k, y \in \mathbb{Y}_{k'}$, dann gilt*

$$x +_k y = x +_{k'} y.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit¹⁰ nehmen wir $k \leq k'$ an. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, sodass $k + l = k'$. Beweis durch Induktion nach l . Der Fall $l = 0$ ist trivial. Induktionsannahme ist, dass für beliebige

$$x \in \mathbb{Y}_k, y \in \mathbb{Y}_k$$

(was automatisch $x \in \mathbb{Y}_{k+l}, y \in \mathbb{Y}_{k+l}$ impliziert) gilt:

$$x +_k y = x +_{k+l} y.$$

Wir können schreiben

$$x = d(k+l)(n), y = d(k+l)(n').$$

Zu Beweisen ist:

$$x +_k y = x +_{k+l+1} y. \tag{6}$$

Zuerst haben wir

$$x +_{k+l} y = d(k+l)(n) + d(k+l)(n') = d(k+l)(n+n') = d(k+l+1)(n+n'+n+n').$$

Weiter gilt

$$x +_{k+l+1} y = d(k+l+1)(n+n) + d(k+l+1)(n'+n') = d(k+l+1)(n+n+n'+n').$$

Nun folgt (6), weil $n + n' + n + n' = n + n + n' + n'$.

□

Wegen Satz 2.5 ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.6 (Addition). Sei $x, y, z \in \mathbb{Y}$. Wir definieren

$$z = x + y$$

falls

$$\exists k : x +_k y = z.$$

Definiere $x \leq y$ falls

$$\exists k : x \leq_k y.$$

¹⁰Dies wird auch gerne mit o.B.d.A. abgekürzt und bedeutet, dass wir eine Fallunterscheidung machen in Fälle, die man in symmetrischer Weise behandeln kann.

Existenz der Summe für beliebige $x \in \mathbb{Y}$, $y \in \mathbb{Y}$ sowie Totalität der Ordnung folgen aus dem nächsten Satz:

Satz 2.7. *Sind $x, y \in \mathbb{Y}$, dann existiert k mit $x \in \mathbb{Y}_k$ und $y \in \mathbb{Y}_k$.*

Beweis. Nach Definition,

$$\exists l : x \in \mathbb{Y}_l \text{ und } \exists l' : y \in \mathbb{Y}_{l'}.$$

Wenn $l \leq l'$, setze $k = l'$. Wenn $l' \leq l$, setze $k = l$. □

Alle weiteren Standardeigenschaften von Addition und Ordnung auf \mathbb{Y} folgen auch leicht.

Satz 2.8. *\mathbb{Y} ist abgeschlossen unter Mittelpunktsbildung: Sind $x, y \in \mathbb{Y}$, dann*

$$\exists z \in \mathbb{Y} : z + z = x + y.$$

Beweis. O.B.d.A. seien $x \in \mathbb{Y}_k, y \in \mathbb{Y}_k$ und

$$x = d(k)(n), y = d(k)(n').$$

Dann setze

$$z = d(k+1)(n+n').$$

Es folgt

$$z + z = x + y.$$

□

Satz 2.9 (Archimedes). *Sei $x \in \mathbb{Y}$ und $k \in \mathbb{N}$, dann gibt es $y \in \mathbb{Y}_k$ mit $x \leq y$.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Y}_l$.

Fall 1: $l \leq k$. Dann $x \in \mathbb{Y}_k$. Wir setzen einfach $y = x$.

Fall 2: $k \leq l$. Dann $\exists a : k + a = l$. Der Fall $a = 0$ folgt aus dem Vorherigen.

Für $a = 1$, nehme an, dass $x = d(k+1)(n)$. Dann können wir

$$y = d(k)(n)$$

setzen, weil nach Definition der dyadischen Zahlen gilt

$$x = d(k+1)(n) \leq d(k+1)(n+n) = d(k)(n) = y.$$

Für allgemeines a können wir eine Induktion durchführen.

□

Satz 2.10. Ist $x \in \mathbb{Y}$ und $k \in \mathbb{N}$, dann gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d(k)(n) \leq x < d(k)(n+1).$$

Der Beweis dieses Satzes ist eine Übung, er folgt leicht mithilfe des Prinzips von Archimedes und dem folgenden Minimalitätsprinzip.

Satz 2.11 (Minimalprinzip). Jede nicht-leere Menge von natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element. Dabei heißt $x \in M$ kleinstes Element, falls $\forall y \in M : x \leq y$.

Beweis. Wir machen einen Widerspruchsbeweis. M hat kein kleinstes Element. Setze $N = \mathbb{N} \setminus M$.

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_n \subset N.$$

Die Behauptung impliziert den Satz 2.11, weil

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_n \subset N \Rightarrow \mathbb{N} \subset N \Rightarrow M = \emptyset.$$

Beweis der Behauptung: Induktion nach n . Der Fall $n = 0$ ist klar, denn $I_0 \subset N$, da I_0 leer ist. Sei n so dass $I_n \subset N$. Man bemerke, dass

$$I_{n+1} = I_n \cup \{n\}.$$

Fall 1: $n \in N$. Dann ist $I_{n+1} \subset N$.

Fall 2: $n \notin N$. Dann folgt $n \in M$, was zusammen mit $I_n \cap M = \emptyset$ Minimalität von n in M impliziert. Widerspruch.

□

Satz 2.12. Ist $x \in \mathbb{Y} \setminus \mathbb{N}$, dann gibt es genau ein k , sodass $x = d(k)(n)$ mit ungeradem n .

Satz 2.13. Es gibt keine dyadische Zahl x mit $x + x + x = 1$.

Beweis. Fall 1: $x \in \mathbb{N}$. Dann $x + x + x \neq 1$.

Fall 2: $x \in \mathbb{Y} \setminus \mathbb{N}$. Sei $x = d(k)(n)$ mit n ungerade und $k = l + 1 \neq 0$. Dann

$$x + x + x = d(k)(n + n + n) \notin \mathbb{N},$$

weil $n + n + n$ ungerade ist.

□

◇ ————— Ende Vorlesung 7, 28.10.2014 ————— ◇

2.2 Dedekindschnitte

Wir möchten nun die eingeführten dyadischen Zahlen dazu verwenden, um die reellen Zahlen zu konstruieren. Hierzu verwenden wir die *Methode der Dedekindschnitte*.

Definition 2.14. Ein *Dedekindschnitt* oder *Initialsegment* ist eine Menge $I \subset \mathbb{Y}$ mit

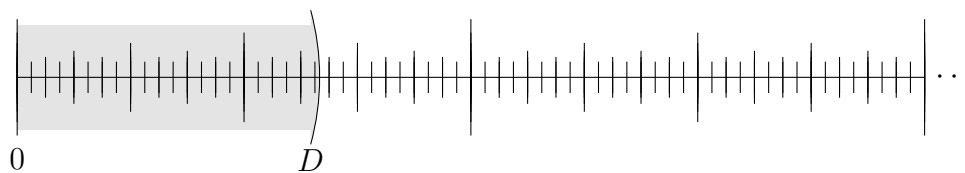
1. $\forall x \in I \forall y \in \mathbb{Y} : x < y \vee y \in I.$
2. $\forall x \in I \exists y \in \mathbb{Y} : x < y \wedge y \in I.$

Die erste Bedingung besagt in Worten ausgedrückt, dass wenn ein x Element des Dedekindschnittes ist, dann sind auch alle y , die kleiner als x sind im Dedekindschnitt enthalten. Die zweite Bedingung drückt aus, dass es für jedes Element in einem Dedekindschnitt immer noch ein strikt größeres gibt, das ebenfalls noch in diesem Dedekindschnitt enthalten ist.

Beispiele. • Für jedes $y \in \mathbb{Y}$ ist die Menge $\{x \in \mathbb{Y} : x < y\}$ ein Dedekindschnitt. Für $y = 0$ ist dies die leere Menge.

- Die Menge $\{x \in \mathbb{Y} : x \leq 1\}$ ist *kein* Dedekindschnitt (Eigenschaft 2 gilt nicht).
- Die Menge $D = \{x \in \mathbb{Y} : x + x + x < 1\}$ ist ein Dedekindschnitt.
- Die Menge \mathbb{Y} ist ein Dedekindschnitt.

Dedekindschnitte lassen sich gut anhand eines Zahlenstrahls visualisieren.



Der grau beschattete Bereich repräsentiert den Dedekindschnitt D aus dem Beispiel.

Wir bezeichnen die Menge der Dedekindschnitte mit A .

Definition 2.15. Es sei $\overline{\mathbb{X}}$ eine Menge einmal gewählte mit einer Bijektion $\alpha : \overline{\mathbb{X}} \rightarrow A$ und $\mathbb{Y} \subset \overline{\mathbb{X}}$, sodass

$$\forall y \in \mathbb{Y} : \alpha(y) = \{x \in \mathbb{Y} : x < y\}$$

Wir nennen $\overline{\mathbb{X}}$ die Menge der *erweiterten nichtnegativen reellen Zahlen*.

Dabei deutet der Zusatz *erweitert* darauf hin, dass auch die gesamte Menge der dyadischen Zahlen \mathbb{Y} ein Dedekindschnitt ist. Wir benutzen das Symbol ∞ für das entsprechende Element in $\overline{\mathbb{X}}$, also $\alpha(\infty) = \mathbb{Y}$. Weiter verwenden wir die Abkürzung $\mathbb{X} = \overline{\mathbb{X}} \setminus \{\infty\}$.

Unsere Aufgabe ist nun, die uns auf den dyadischen Zahlen \mathbb{Y} bereits bekannten Strukturen auf $\overline{\mathbb{X}}$ zu übertragen.

Nach Definition der Dedekindschnitte gilt für $x \in \mathbb{Y}$ und $y \in \mathbb{Y}$

$$\begin{cases} y < x & \text{genau dann, wenn } y \in \alpha(x), \\ x \leq y & \text{genau dann, wenn } y \notin \alpha(x). \end{cases}$$

Da die Bedingungen auf der rechten Seite auch Sinn machen, wenn $x \in \overline{\mathbb{X}}$, können wir für $y \in \mathbb{Y}$ und $x \in \overline{\mathbb{X}} \setminus \mathbb{Y}$ definieren:

$$\begin{cases} y < x & \text{falls } y \in \alpha(x), \\ x \leq y & \text{falls } y \notin \alpha(x). \end{cases}$$

Man beachte, dass wir hier immer noch fordern, dass y eine dyadische Zahl ist.

Es seien $x, x' \in \overline{\mathbb{X}}$. Dann ist $x = x'$ äquivalent zu $\alpha(x) = \alpha(x')$. Dies wiederum ist äquivalent zu $\alpha(x) \subset \alpha(x'), \alpha(x') \subset \alpha(x)$, i.e. $\forall y \in \alpha(x) : y \in \alpha(x')$ und $\forall y \in \alpha(x') : y \in \alpha(x)$. Nach Definition bedeutet dies gerade

$$\forall y \in \mathbb{Y} : (y < x \wedge y < x') \vee (x \leq y \wedge x' \leq y) \quad (7)$$

Zusammenfassend gilt $x = x'$ genau dann, wenn (7) gilt.

Satz 2.16. *Seien $y \in \mathbb{Y}, x \in \overline{\mathbb{X}}$. Dann gelten*

1. $y < x$ genau dann, wenn $\exists y' \in \mathbb{Y} : y \leq y' \wedge y' < x$,
2. $x \leq y$ genau dann, wenn $\forall y' \in \mathbb{Y} : y' < y \vee x \leq y'$.

Beweis. Wir beweisen den ersten Punkt.

„ \Rightarrow “: Sei $y < x$. Setze $y' = y$.

„ \Leftarrow “: Sei $y' \in \mathbb{Y}$ mit $y \leq y', y' < x$. Dann gilt $y' \in \alpha(x)$. Nach der ersten Dedekindschnitteigenschaft folgt $y \in \alpha(x)$, also $y < x$.

Der Beweis von 2. folgt ähnlich, oder kann auf 1. reduziert werden mithilfe von Dualität. \square

Die Bedingungen im Satz haben den Vorteil, dass sie auch für $y \in \overline{\mathbb{X}}$ Sinn machen. Daher können wir jetzt die Ordnung auf $\overline{\mathbb{X}}$ definieren. Für alle $x \in \overline{\mathbb{X}}, y \in \overline{\mathbb{X}} \setminus Y$ sei

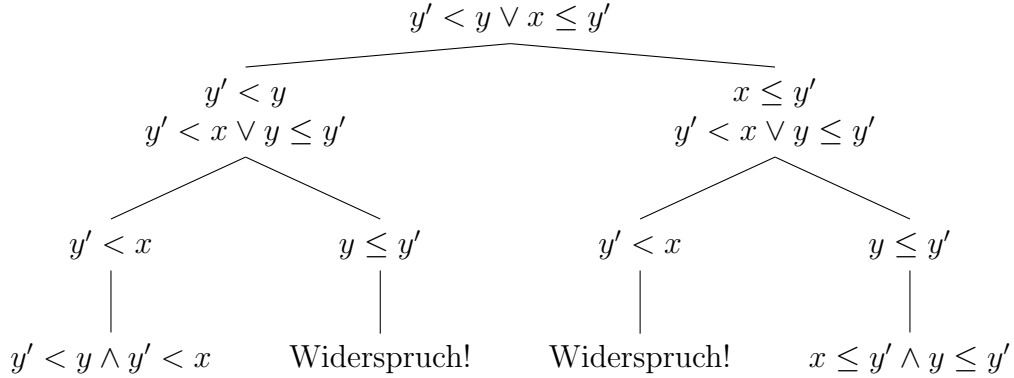
$$\begin{cases} y < x & \text{falls } \exists y' \in \mathbb{Y} : y \leq y' \wedge y' < x \\ x \leq y & \text{falls } \forall y' \in \mathbb{Y} : y' < y \vee x \leq y'. \end{cases}$$

Die Ordnung auf $\overline{\mathbb{X}}$ gehorcht den bekannten Eigenschaften.

Satz 2.17. Für $x, y, z \in \overline{\mathbb{X}}$ gelten

1. $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität),
2. $x \leq x$ (Reflexivität),
3. $x \leq y \vee y \leq x$ (Totalität),
4. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie).

Beweis. Wir beweisen hier exemplarisch nur die Antisymmetrie. Seien $x, y \in \overline{\mathbb{X}}$ mit $x \leq y$ und $y \leq x$. Sei $y' \in \mathbb{Y}$. Dann gilt $y' < y \vee x \leq y'$.



Damit haben wir (7) für x und y gezeigt. Es folgt $x = y$. □

Satz 2.18 (Archimedes). Sei $z \in \overline{\mathbb{X}}$. Seien $\varepsilon \in \mathbb{Y}, \varepsilon \neq 0$. Dann gibt es $x \in \mathbb{Y}$ mit $x \leq z < x + \varepsilon$.

Beweis. Es genügt die Behauptung für $\varepsilon = d(k)(1) = \frac{1}{2^k} < \frac{n+1}{2^k}$ zu zeigen. Da $z \neq \infty$, gibt es $y \in \mathbb{Y}$ mit $y \notin \alpha(z)$. Also ist $z \leq y$. Nach dem Satz von Archimedes auf \mathbb{Y} (Satz 2.9) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$y < d(k)(n+1) = \frac{n+1}{2^k}$$

Also gilt $z < d(k)(n+1)$ nach Transitivität. Wähle $n \in \mathbb{N}$ minimal mit $z < d(k)(n+1)$ (Satz 2.11).

Fall 1: $n = 0$. Dann ist $0 \leq z < \frac{1}{2^k} = 0 + \varepsilon$.

Fall 2: $n \neq 0$. Dann ist $n = m + 1$ für $m \in \mathbb{N}$. Also gilt $z \geq d(k)(n)$, denn sonst wäre $z < d(k)(n) = d(k)(m+1)$ und n damit nicht minimal mit dieser Eigenschaft. Also

$$d(k)(n) \leq z < d(k)(n+1) = d(k)(n) + \varepsilon.$$

□

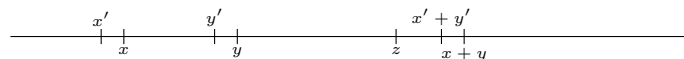
Wir kommen nun zur Definition der Addition auf $\overline{\mathbb{X}}$. Sind $x, y \in \mathbb{Y}$, so gilt für alle $z \in \mathbb{Y}$:

$$z < x + y \text{ genau dann, wenn } \exists x' \in \mathbb{Y} \exists y' \in \mathbb{Y} : x' \leq x \wedge y' \leq y \wedge z < x' + y'$$

Die rechte Seite dieser Aussage macht auch Sinn, wenn $x, y \in \overline{\mathbb{X}}$. Sind also $x, y \in \overline{\mathbb{X}}$, aber nicht beide in \mathbb{Y} , dann *definieren* wir $x + y$ durch

$$z < x + y \text{ falls } \exists x' \in \mathbb{Y} \exists y' \in \mathbb{Y} : x' \leq x \wedge y' \leq y \wedge z < x' + y'$$

für alle $z \in \mathbb{Y}$. Die Aussage wird leichter verständlich, wenn man die Ungleichungen auf der Zahlengerade visualisiert.



Die Addition ist im Sinne der folgenden zwei Sätze verträglich mit der Ordnung.

Satz 2.19. Für alle $x, y, z \in \overline{\mathbb{X}}$ gilt

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

Beweis. Sei $x \leq y$. Sei $a \in \mathbb{Y}$ mit $a < x + z$. Zu zeigen ist $a < y + z$. Wegen $a < x + z$ können wir nach der Definition der Addition $x', z' \in \mathbb{Y}$ wählen mit

$$x' \leq x, z' \leq z, a < x' + z'.$$

Wegen $x \leq y$ folgt $x' \leq y$ (Transitivität). Wieder nach Definition der Addition folgt $a < y + z$. □

Aus der Definition der Addition folgt insbesondere

$$x + \infty = \infty = \infty + x$$

für alle $x \in \overline{\mathbb{X}}$. Daher müssen wir in der Umkehrung des letzten Satzes den Fall $z = \infty$ ausschließen.

Satz 2.20. Seien $x, y, z \in \overline{\mathbb{X}}$ mit $z \neq \infty$. Dann gilt

$$x + z \leq y + z \Rightarrow x \leq y.$$

Beweis. Sei $x' \in \mathbb{Y}$ mit $x' < x$. Zu zeigen ist $x' < y$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{Y}$, sodass $x' + \varepsilon < x$ (möglich nach der zweiten Bedingung der Definition eines Dedekindschnitts). Sei $z' \in \mathbb{Y}$, sodass $z' \leq z < z' + \varepsilon$ (möglich nach Satz 2.18). Dann gilt nach Definition der Addition

$$x' + \varepsilon + z' < x + z.$$

Also $x' + \varepsilon + z' < y + z$ nach Voraussetzung. Dann existieren $y', z'' \in \mathbb{Y}$ mit $y' \leq y, z'' \leq z$ und

$$x' + \varepsilon + z' < y' + z''.$$

Wegen Verträglichkeit von Addition und Ordnung in den dyadischen Zahlen folgt

$$x' + \varepsilon + z' < y' + z'' < y' + z' + \varepsilon.$$

Woraus erneut nach Verträglichkeit in den dyadischen Zahlen folgt $x' < y'$, und schließlich $x' \leq y$. \square

Auch die weiteren Eigenschaften der Addition lassen sich auf $\overline{\mathbb{X}}$ übertragen.

Satz 2.21. Für $x, y, z \in \overline{\mathbb{X}}$ gelten

1. $x + y = y + z$ (Kommutativität),
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Assoziativität),
3. Falls $z \neq \infty$, dann $x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$ (Auslöschung),
4. $x + 0 = x$ (neutrales Element).

Satz 2.22 (Mittelpunktseigenschaft). Für $x, y \in \overline{\mathbb{X}}$ existiert $z \in \overline{\mathbb{X}}$, sodass $z + z = x + y$.

Die Beweise sind als Übungsaufgaben überlassen.

Als nächstes möchten wir uns der Binärentwicklung reeller Zahlen nähern. Dazu approximieren wir reelle Zahlen durch dyadische Zahlen. Präziser ausgedrückt führen wir eine Intervallschachtelung durch.

Definition 2.23 (Dyadische Intervalle). Für $k, n \in \mathbb{N}$ heißt

$$I_{k,n} = \left\{ x \in \overline{\mathbb{X}} : \frac{n}{2^k} \leq x < \frac{n+1}{2^k} \right\}$$

dyadisches Intervall. $I_{k,n}$ heißt $\begin{cases} \text{linkes} \\ \text{rechtes} \end{cases}$ Kind, falls $n \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ ist.

Im Allgemeinen bezeichnet man für $a, b \in \overline{\mathbb{X}}$ die Menge

$$[a, b) := \{x \in \overline{\mathbb{X}} : a \leq x < b\}$$

als (*halboffenes*) *Intervall mit den Endpunkten a, b* .

Dyadische Intervalle zeichnen sich durch einige nützliche Eigenschaften aus.

1. Für $x \in \mathbb{X}$, $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in I_{k,n}$.
2. Zwei dyadische Intervalle sind entweder disjunkt oder ineinander enthalten.

Die erste Eigenschaft folgt aus der Archimedeseigenschaft und die Zweite kann per Induktion oder Minimalprinzip bewiesen werden.

Satz 2.24 (Intervallschachtelung). *Sei $x \in \mathbb{X}$. Dann gibt es eine eindeutige Folge n_k natürlicher Zahlen mit $x \in I_{k,n_k}$.*

Die Parität der n_k gibt genau die *Binärentwicklung* einer reellen Zahl wieder. Setze nämlich $a_k = 0$, falls n_k gerade und $a_k = 1$, falls n_k ungerade ist. Sei $x \in [0, 1)$. Dann schreiben wir

$$x =: 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

und nennen dies die Binärentwicklung von x .

Satz 2.25. *Sei $x \in \mathbb{Y}$. Es existiert $k' \in \mathbb{N}$, sodass n_k für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > k'$ gerade ist.*

Zum Beweis sei nur gesagt, dass k' so gewählt werden kann (und muss) dass gerade $x = \frac{n}{2^{k'}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dieser Satz besagt, dass die Binärentwicklung dyadischer Zahlen nach endlich vielen Nachkommastellen „aufhört“, das heißt nur noch aus Nullen besteht.

Satz 2.26. *Sei $x \in \overline{\mathbb{X}}$. Dann gibt es für alle $k' \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > k'$, sodass n_k gerade ist.*

Dieser Satz besagt, dass die Binärentwicklung nach unserer Definition niemals von der Art

$$0, a_1 a_2 \dots 11111 \dots$$

ist, d.h. immer unendlich viele Nullen enthalten muss. In der Vorlesung wurde ein Widerspruchsbeweis skizziert: Ist k' so dass für alle $k > k'$ die Zahl n_k ungerade ist, so kann man zeigen dass $\frac{n_{k'}+1}{2^{k'}} \leq x$, indem man gemäß Definition $y < x$ für alle $y \in \mathbb{Y}$ mit $y < \frac{n_{k'}+1}{2^{k'}}$ zeigt. Das ist aber ein Widerspruch zu $x \in I_{k',n_{k'}}$.

Anhand der Binärentwicklung lässt sich leicht beweisen, dass die reellen Zahlen, anders als die dyadischen Zahlen, überabzählbar sind.

Satz 2.27. $\overline{\mathbb{X}}$ ist nicht abzählbar.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $[0, 1) \subset \overline{\mathbb{X}}$ nicht abzählbar ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Menge

$$A = \{a : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} : a \text{ nimmt unendlich oft den Wert } 0 \text{ an}\}$$

überabzählbar ist. Nehmen wir an, dass A abzählbar ist. Dann existiert eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Wir konstruieren eine Folge $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ in A , die nicht im Bild von f liegt. Sei nämlich $h(n + n + 1) = 0$ und

$$h(n + n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } f(n)(n + n) = 1, \\ 1, & \text{wenn } f(n)(n + n) = 0. \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Also $h(n + n) \neq f(n)(n + n)$. Dann ist $h \in A$, da es unendlich viele ungerade Zahlen gibt. Nach Annahme gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $f(m) = h$. Insbesondere gilt

$$h(m + m) = f(m)(m + m).$$

Widerspruch! □

Dieser Beweis ist ein *Diagonalargument* und geht auf Cantor zurück.

◇————— Ende Vorlesung 8, 30.10.2014 —————◇

3 Folgen

3.1 Monoton wachsende Folgen

Wir betrachten jetzt Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$, und erinnern uns daran dass Funktionen mit Definitionsbereich \mathbb{N} auch Folgen genannt werden. Von besonderer Bedeutung sind solche Folgen, die die Ordnungsstruktur erhalten im Sinne einer der folgenden zwei Definitionen.

Definition 3.1. Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ heißt *monoton wachsend* falls $\forall m, n \in \mathbb{N}$,

$$n \leq m \Rightarrow f(n) \leq f(m).$$

$f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ heißt *streng monoton wachsend* falls $\forall m, n \in \mathbb{N}$,

$$n < m \Rightarrow f(n) < f(m).$$

Der folgende Satz bietet ein einfaches Kriterium, um die Monotonie einer Funktion zu überprüfen. Ein ähnlicher Satz gilt auch für streng monoton wachsende Folgen.

Satz 3.2. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$, wenn $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq f(n+1)$, dann ist f monoton wachsend.

Beweis. Zu zeigen ist $\forall l \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq f(n+l)$. Das kann durch Induktion nach l bewiesen werden. \square

Satz 3.3. f ist monoton wachsend, genau dann wenn es eine Folge $g : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ gibt mit

$$\forall n : f(n) = f(0) + \sum_{m \in I_n} g(m),$$

Das Summenzeichen \sum ist dabei rekursiv definiert und hat folgende wesentlichen Eigenschaften:

$$\sum_{m \in I_0} g(m) = 0,$$

$$\sum_{m \in I_{n+1}} g(m) = \left(\sum_{m \in I_n} g(m) \right) + g(n).$$

Die Funktion g heißt *die Folge der Inkremente* von f , und $\sum_{m \in I_n} g(m)$ heißt *Partialsomme* von g .

Wir schreiben auch

$$\sum_{m \in I_n} g(m) =: \sum_{m=0}^{n-1} g(m),$$

Beweis. Hinreichende Bedingung: Sei f monoton wachsend. Dann

$$\forall n : f(n) \leq f(n+1).$$

Daraus folgt

$$\forall n, \exists g : f(n) + g = f(n+1).$$

Nach dem Auswahlaxiom können wir eine Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ finden, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) + g(n) = f(n+1).$$

Zu zeigen:

$$\forall n : f(n) = f(0) + \sum_{m \in I_n} g(m).$$

Wir beweisen dies durch Induktion nach n . Falls $n = 0$, dann $f(0) + \sum_{m \in I_0} g(m) = f(0) + 0 = f(0)$. Sei n so gewählt, dass

$$f(n) = f(0) + \sum_{m \in I_n} g(m).$$

Dann gilt

$$f(n+1) = f(n) + g(n) = f(0) + \left(\sum_{m \in I_n} g(m) \right) + g(n).$$

Nach Definition im Satz erhalten wir:

$$f(n+1) = f(0) + \sum_{m \in I_{n+1}} g(m).$$

Notwendige Bedingung: Es existiert eine Folge g mit

$$f(n) = f(0) + \sum_{m \in I_n} g(m).$$

Zu zeigen:

$$\forall n : f(n) \leq f(n+1). \quad (8)$$

Das kann einfach per Definition bewiesen werden:

$$f(n+1) = f(0) + \left(\sum_{m \in I_n} g(m) \right) + g(n) = f(n) + g(n),$$

woraus die Gleichung (8) folgt. \square

Man kann auch Folgen betrachten, die die Struktur der Addition erhalten.

Definition 3.4. Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ heißt *additionserhaltend*, falls

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : f(n+m) = f(n) + f(m).$$

Die Folge heisst *linear*, falls zusätzlich $f(1) \neq \infty$.

Lineare Folgen haben eine sehr einfache Struktur. Ihre Inkremente sind konstant.

Satz 3.5. Eine Folge f ist linear genau dann wenn

$$f(0) = 0 \text{ und } \forall n : g(n) = f(1) < \infty,$$

wobei g wie oben die Folge der Inkremente ist.

Beweis. Hinreichende Bedingung: Linearität von f impliziert wegen

$$f(0) + f(1) = f(1) < \infty$$

dass $f(0) \neq \infty$. Wir können daher in

$$f(0) + f(0) = f(0 + 0) = f(0)$$

Auslöschung anwenden und erhalten $f(0) = 0$. Für die Folge der Inkremente haben wir nach Definition

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = f(n) + g(n),$$

also $g(n) = f(1)$ für alle n sofern $f(n) \neq \infty$. Letzteres ist aber leicht durch Induktion zu beweisen.

Notwendigkeit ist auch einfach zu sehen. □

Es wird als Übung überlassen, additionserhaltende Folgen zu analysieren für die $f(1) = \infty$ gilt.

Definition 3.6. Wenn f linear ist und $f(1) = c \neq \infty$, dann schreiben wir

$$f(n) = c \cdot n.$$

Wir wenden uns wieder ordnungserhaltenden Folgen zu.

Definition 3.7. Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ heißt beschränkt, falls

$$\exists x \in \overline{\mathbb{X}}, x \neq \infty : \forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq x.$$

Ein neues Phänomen in $\overline{\mathbb{X}}$ (oder auch schon in \mathbb{Y}) im Vergleich zu \mathbb{N} ist, dass es streng monotone wachsende Folgen $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ gibt, die beschränkt sind.

Beispiel. Wir definieren

$$f(n) := \sum_{m \in I_n} \frac{1}{2^m}.$$

Die Beschränktheit von f folgt aus der folgenden Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n + 1) + \frac{1}{2^n} = 2.$$

Der Beweis dieser Behauptung ist durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ haben wir

$$f(1) + \frac{1}{2^0} = 1 + 1 = 2.$$

Jetzt nehmen wir an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$

$$f(n+1) + \frac{1}{2^n} = 2.$$

Dann

$$f(n+2) + \frac{1}{2^{n+1}} = f(n+1) + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = f(n+1) + \frac{1}{2^n} = 2.$$

Das schließt den Beweis der Behauptung ab.

Achilles und die Schildkröte.

Passend zu diesem Beispiel gibt es eine scheinbar paradoxe Erzählung des griechischen Philosophen *Zenon von Elea*. Sie handelt von einem Wettrennen zwischen Achilles, einem sehr schnellen Läufer der Antike, und einer (sehr langsamen) Schildkröte. Um seinen Vorteil auszugleichen gibt Achilles der Schildkröte einen Vorsprung. Zenon argumentiert nun, dass Achilles die Schildkröte dann niemals einholen kann, da in der Zeit, die er benötigt, um den Anfangsvorsprung der Schildkröte einzuholen, diese ja ihren Vorsprung vergrößert hat. Während Achilles dann diesen neuen Vorsprung einholen muss, läuft die Schildkröte aber wieder ein bisschen weiter und so weiter, sodass Achilles immer hinter der Schildkröte zurückbleibt.

Das obige Beispiel demonstriert die Geschichte mit der Annahme, dass die Geschwindigkeit der Schildkröte gerade halb so groß ist wie die von Achilles und dass Achilles genau eine Zeiteinheit benötigt, um den ersten Vorsprung der Schildkröte einzuholen. Dann braucht er nur noch halb soviel Zeit für den zweiten Vorsprung und wieder halb soviel für den Nächsten und so weiter. Für den $n+1$ -ten Vorsprung braucht er also $\frac{1}{2^n}$ Zeiteinheiten, sodass er zum Einholen der ersten $n+1$ Vorsprünge insgesamt $f(n)$ Zeiteinheiten benötigt. Die Erzählung von Zenon suggeriert dem Leser ein unbeschränktes Wachstum von $f(n)$. Richtig ist, und das ist die Suggestion von Zenon, dass wenn das Rennen so gestaltet wird, dass jedesmal wenn Achilles den Punkt eingeholt hat an dem die Schildkröte im vorigen Rechenschritt war, das Rennen angehalten wird und zunächst der nächste Rechenschritt ausgerechnet wird, dass Achilles nie die Schildkröte einholen kann. Allerdings wird in einem normalen Rennen die Rechenzeit nicht berücksichtigt, sodass Achilles die Schildkröte nach genau 2 Zeiteinheiten eingeholt hat.

Definition 3.8. Sei $A \subset \overline{\mathbb{X}}$ eine Menge. Das *Supremum* von A ist diejenige Zahl $x \in \overline{\mathbb{X}}$ mit

$$\alpha(x) = \{y \in \mathbb{Y} \mid \exists a \in A : y < a\}.$$

(Man zeigt leicht, dass auf der rechten Seite tatsächlich ein Dedekindschnitt steht.)

Wir schreiben $x = \sup(A)$.

Das Supremum $\sup(A)$ ist die *kleinste obere Schranke* der Menge A . Dabei heißt eine Zahl $x \in \overline{\mathbb{X}}$ *obere Schranke* von A , wenn $\forall a \in A : a \leq x$. Das ist äquivalent zu

$$\forall y \in \mathbb{Y} : y < a \Rightarrow y < x$$

wie man aus der Definition der Dedekindschnitte ersehen kann.

Eine Zahl $x \in \overline{\mathbb{X}}$ ist *kleinste obere Schranke* von A , falls für alle $b \in \overline{\mathbb{X}}$ mit $b < x$ ein $a \in A$ mit $b < a$ existiert.

Sei $x = \sup(A)$. Wir sehen leicht, dass x oberes Schranke von A ist, da wenn $a \in A$ ist wir für alle dyadischen Zahlen $y < a$ nach Definition des Supremums auch $y < x$ haben. Ferner ist x die kleinste obere Schranke von A . Ist nämlich $b < x$, dann

$$\exists y \in \mathbb{Y} : b < y < x.$$

Aber $y < x$ impliziert $\exists a \in A : y < a$. Deshalb $b < y < a$, also ist b nicht obere Schranke.

Man überzeugt sich leicht, dass die kleinste obere Schranke einer Menge eindeutig bestimmt ist.

Für eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ schreiben wir auch

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \sup(\text{Ran}(f)).$$

Der folgende Satz beschreibt präzise die Intuition, dass eine monoton wachsende Folge sich ihrem Supremum annähert.

Satz 3.9. *Sei f monoton wachsend mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f(n) = a < \infty$. Dann gilt*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \forall m > n : f(m) \leq a < f(m) + \varepsilon. \quad (9)$$

Umgekehrt ist a so beschaffen, dass (9) gilt, dann ist $a < \infty$ und

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f(n) = a.$$

Beweis. Hinreichende Bedingung: Wir nehmen an dass $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ ist und zeigen 9. Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Archimedeseigenschaft aus Satz 2.18 gilt

$$\exists y \in \mathbb{Y} : y < a < y + \varepsilon.$$

Da $y < a$, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y < f(n)$. Wähle ein solches n . Sei $m > n$ gegeben, dann ist

$$f(m) \leq a < y + \varepsilon < f(n) + \varepsilon \leq f(m) + \varepsilon.$$

Notwendige Bedingung: Wir nehmen an, dass a (9) erfüllt. Zu zeigen ist

$$a = \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

Das heißt $a \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ und $a \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n)$.

Erste Ungleichung: $a \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n)$. Sei $y < a$. Dann $\exists \varepsilon > 0 : y + \varepsilon < a$.

Wähle n mit

$$f(n+1) \leq a < f(n+1) + \varepsilon.$$

Dann

$$y + \varepsilon < a < f(n+1) + \varepsilon.$$

Dies impliziert $y < f(n+1) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n)$.

Zweite Ungleichung: $a \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n)$. Übungsaufgabe.

□

Ist f eine monotone wachsende Folge, so schreiben wir

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n) &=: \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \\ &=: f(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} g(n) \\ &=: f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} g(n). \end{aligned} \tag{10}$$

Dabei ist g die Folge aus Satz 3.3, also die Folge der Inkremente der monoton wachsenden Folge f .

Die nächsten zwei Sätze sind von ähnlichem Typ.

Satz 3.10. *Ist f monoton wachsend mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \infty$, dann gilt*

$$\forall x \in \overline{\mathbb{X}}, x \neq \infty, \exists n \in \mathbb{N}, \forall m > n : x < f(m).$$

Satz 3.11 (Cauchy Kriterium für monoton wachsende Folgen). *Sei f eine monotone wachsende Folge, dann*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} f(n) < \infty$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall m > n, \forall m' > n : f(m') \leq f(m) + \varepsilon.$$

Das Cauchy Kriterium ist nützlich, weil es uns erlaubt die Endlichkeit des Supremums von f festzustellen ohne den tatsächlichen Grenzwert zu benutzen, der möglicherweise schwer zu berechnen ist.

◇ ————— Ende Vorlesung 9, 04.11.2014 ————— ◇

Satz 3.12. *Ist $A \subset \overline{\mathbb{X}}$ eine nichtleere Menge mit $\sup(A) \notin A$, dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ mit*

$$\sup(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n).$$

Beweis. Hilfsbehauptung: $\forall x \in A \exists y \in A : x + \sup(A) \leq y + y$ und $x < y$.

Beweis der Hilfsbehauptung. Sei $x \in A$. Wähle ε , sodass $\varepsilon + \varepsilon = \eta$, $\varepsilon \neq 0$. Dann gibt es ein $y \in A$ mit $x + \varepsilon \leq y$. Das ist möglich, weil $x + \varepsilon$ keine obere Schranke ist, da $x + \varepsilon < x + \varepsilon + \varepsilon = \sup(A)$. Dann gilt $x + \sup(A) = x + \varepsilon + x + \varepsilon \leq y + y$. □

Nach Auswahlaxiom, angewendet auf die Hilfsbehauptung, erhalten wir eine Funktion $g : A \rightarrow A$ mit $\forall x \in A : x + \sup(A) \leq g(x) + g(x)$ und $x < g(x)$. Wähle $p \in A$ mit $p \leq \sup(A) < p + 1$ und setze $f(n) := g^n(p)$. Dann ist f streng monoton wachsend, denn nach Definition

$$f(n + 1) = g(f(n)) > f(n).$$

Da $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq \sup(A)$, genügt es nun zu zeigen: $f(n) + \frac{1}{2^n} > \sup(A)$. Dies beweisen wir durch Induktion. Der Fall $n = 0$ ist klar, da $f(0) + 1 = p + 1 > \sup(A)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) + \frac{1}{2^n} > \sup(A)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(n + 1) + \frac{1}{2^{n+1}} + f(n + 1) + \frac{1}{2^{n+1}} &= g(f(n)) + g(f(n)) + \frac{1}{2^n} \\ &\geq f(n) + \sup(A) + \frac{1}{2^n} \\ &> \sup(A) + \sup(A) \end{aligned}$$

Nun folgt leicht $f(n) + \frac{1}{2^n} > \sup(A)$, zum Beispiel durch Widerspruchsbeweis. □

Man bemerke, dass das f aus dem Satz injektiv ist. Also muss A unendlich sein. Wenn A also eine endliche Menge ist, gilt automatisch $\sup(A) \in A$.

Definition 3.13. Falls $\sup(A) \in A$ für eine Menge $A \subset \overline{\mathbb{X}}$, nennt man $\sup(A)$ das *Maximum* der Menge A und schreibt $\max(A) := \sup(A)$.

Wir haben also die folgende Aussage.

Satz 3.14. *Jede endliche Menge $A \subset \overline{\mathbb{X}}$ hat ein Maximum.*

3.2 Allgemeine Folgen

Zum Studium allgemeiner Folgen benötigen wir analog zur Theorie der ordnungserhaltenden Folgen auch die ordnungsumkehrenden Folgen. Ohne ins Detail zu gehen, beschreiben wir die wesentlichen Definitionen und Sätze.

Definition 3.15. Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ heißt *monoton fallend*, wenn $\forall n, m \in \mathbb{N} : n \leq m \Rightarrow f(m) \leq f(n)$.

Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ heißt *streng monoton fallend*, wenn $\forall n, m \in \mathbb{N} : n < m \Rightarrow f(m) < f(n)$.

Definition 3.16. Das *Infimum* einer Menge $A \subset \overline{\mathbb{X}}$ ist eine Zahl $\inf(A) \in \overline{\mathbb{X}}$ definiert durch $y < \inf(A)$ für $y \in \mathbb{Y}$, falls $\exists \varepsilon > 0 \forall a \in A : y + \varepsilon < a$.

Man beachte hier die Verwendung des ε , um in der Tat einen Dedekindschnitt zu erhalten. Das Infimum einer Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ ist definiert als

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f(n) := \inf \text{Ran}(f)$$

Satz 3.17. Ist $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ eine monoton fallende Folge mit $a := \inf_{n \in \mathbb{N}} f(n) \neq \infty$, dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n : a \leq f(m) < a + \varepsilon.$$

Ist f eine monoton fallende Folge, so schreiben wir $\inf_{n \in \mathbb{N}} f(n) =: \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.

Wir wenden uns nun allgemeinen Folgen zu. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ irgendeine Folge. Natürlich braucht f aber weder monoton wachsend, noch monoton fallend zu sein. Um den Grenzwertbegriff für monotone Folgen auch für allgemeine Folgen nutzbar zu machen, assoziieren wir zu einer allgemeinen Folge eine monoton fallende und eine monoton wachsende Folge, die f gewissermaßen einhüllen. Definiere

$$g(n) := \inf\{f(m) : m \geq n\}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist g monoton wachsend, denn für $n < n'$ ist

$$\{f(m) : m \geq n'\} \subset \{f(m) : m \geq n\},$$

und da generell für Mengen $A \subset B \subset \overline{\mathbb{X}}$ gilt, dass $\inf(A) \geq \inf(B)$ ('Übung), haben wir

$$g(n) = \inf\{f(m) : m \geq n\} \leq \inf\{f(m) : m \geq n'\} = g(n').$$

Wir definieren nun den *Limes inferior* von f als

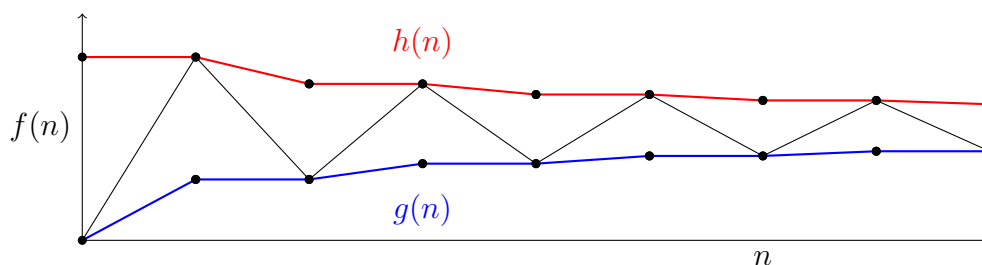
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) := \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g(n)$$

Ähnlich definieren wir

$$h(n) = \sup\{f(m) : m \geq n\}.$$

Dann ist h monoton fallend und wir definieren den *Limes superior* von f durch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) := \lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} h(n)$$



Die Abbildung illustriert, wie die Folgen h und g die Folge f einhüllen. In dem speziellen Beispiel der Abbildung kann man sich vorstellen, dass Limes superior und Limes inferior übereinstimmen, denn beide einhüllenden Kurven könnten auf einen gemeinsamen Wert zulaufen. Dies kann, muss aber nicht notwendigerweise der Fall sein.

Beispiel. Man betrachte die Folge $f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $g(n) = 0$ und $h(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) = 1$.

Aus der Definition der einhüllenden Folgen ist schnell klar, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $g(n) \leq h(m)$. Daraus folgt leicht der folgende Satz.

Satz 3.18. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ eine Folge. Dann gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n).$$

Für monotone Folgen gilt stets Gleichheit.

Satz 3.19. Ist $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ monoton wachsend oder fallend, dann gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(n)$.

Beweis. Sei f monoton wachsend. Der Fall, dass f monoton fallend ist geht analog. Es gilt $g(n) = f(n)$, da f monoton wachsend ist. Also ist

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g(n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$$

Andererseits ist $h(n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} f(m)$ konstant für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} h(n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} f(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n).$$

□

Definition 3.20. Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ heißt (*eigentlich*) *konvergent*, falls

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) < \infty.$$

Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ heißt *uneigentlich konvergent* oder *bestimmt divergent*, falls

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty.$$

Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ heißt (*unbestimmt*) *divergent*, falls

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) < \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n).$$

Falls $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n)$, so sagt man, dass der (eigentliche oder uneigentliche) *Grenzwert* existiert und schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n).$$

Nach den bisherigen Sätzen ist dies offenbar konsistent mit der Definition des Grenzwertes im Falle monotoner Folgen.

Beispiele. • Die Folge $f(n) = n$ ist uneigentlich konvergent, denn

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty.$$

• Die Folge $f(n) = \begin{cases} n, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$ ist unbestimmt divergent, denn

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 < \infty = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n).$$

Noch einmal zusammenfassend haben wir die folgenden Tatsachen festgestellt:

• Jede Menge $A \subset \overline{\mathbb{X}}$ hat ein Supremum, $\sup(A)$, und ein Infimum, $\inf(A)$.

- Jede Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ hat einen Limes inferior, $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n)$, und einen Limes superior, $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(n)$.
- Jede monotone Folge hat einen Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.

Im Gegensatz zu diesen klaren Verhältnissen, kann man von einem Limes einer allgemeinen Folge erst sprechen, wenn die Konvergenz der Folge festgestellt ist.

Wir kommen nun zu einigen einfachen Kriterien, um Konvergenz einer Folge festzustellen.

Satz 3.21. *Eine Folge f konvergiert eigentlich mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = a$ genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n : f(m) < a + \varepsilon \wedge a < f(m) + \varepsilon.$$

In den meisten Lehrbüchern wird die äquivalente Schreibweise $|f(m) - a| < \varepsilon$ statt $f(m) < a + \varepsilon \wedge a < f(m) + \varepsilon$ gebraucht. Wir haben jedoch bisher weder die Subtraktion, noch den Absolutbetrag eingeführt und das ist, wie man sieht bisher auch nicht notwendig gewesen.

Satz 3.22. *Eine Folge f konvergiert uneigentlich, falls*

$$\forall x \in \overline{\mathbb{X}} \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n : f(m) > x \vee x = \infty.$$

Nach unseren bisherigen Erkenntnissen müssen wir um zu zeigen, dass eine Folge konvergiert immer bereits ihren Grenzwert kennen. Dies ist jedoch oft unpraktisch. Stattdessen können wir auch ein Konvergenzkriterium formulieren, dass die Folgenglieder untereinander, statt mit dem (oft unbekanntem) Grenzwert vergleicht.

Satz 3.23 (Cauchy-Kriterium für eigentlich konvergente Folgen). *Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ eine Folge mit*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n, m' \geq n : f(m) < f(m') + \varepsilon \wedge f(m') < f(m) + \varepsilon. \quad (11)$$

Dann ist f eigentlich konvergent. Umgekehrt gilt für eine eigentlich konvergente Folge f stets die obige Aussage.

Definition 3.24. Ist $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ eine Folge und $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge, dann heißt die Folge $h = f \circ n$ (also $h(k) = f(n(k))$ für $k \in \mathbb{N}$) eine *Teilfolge* von f .

Da man oft auch f_n für die Werte $f(n)$ einer Folge schreibt, notiert man konsistenterweise die Werte einer Teilfolge auch meist als $h_k = f_{n_k}$.

Bemerkung. Die einhüllenden Folgen g, h aus der Definition von \limsup und \liminf sind *nicht* notwendigerweise Teilfolgen von f . Tatsächlich brauchen für gegebenes n die Werte $g(n), h(n)$ nicht im Bild von f zu liegen, was notwendig für eine Teilfolge ist.

Satz 3.25 (Heine-Borel). *Jede Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ hat eine monotone Teilfolge.*

Man beachte, dass hier nicht spezifiziert ist, ob die monotone Folge nun monoton wachsend oder monoton fallend ist. In der Tat kann man im Allgemeinen nur die Existenz einer von beiden fordern, wie man am Beispiel einer streng monoton wachsenden Folge f oder einer streng monoton fallenden Folge f sieht.

Beispiel. Sei

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und $n(k) = k + k$. Dann ist $h(k) = f(n(k)) = 0$ eine monotone Teilfolge von f . Ist dagegen $n(k) = k + k + 1$. Dann ist $h(k) = f(n(k)) = 1$ auch eine monotone Teilfolge von f mit einem anderen Grenzwert.

Beweis von Satz 3.25. Nach TND ist eine der folgenden Aussagen wahr.

1. $\forall m \in \mathbb{N} \exists m' > m \forall m'' > m' : f(m'') \geq f(m')$
2. $\exists m \in \mathbb{N} \forall m' > m \exists m'' > m' : f(m'') < f(m')$

Fall 1. Nach Auswahlaxiom gibt es eine Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\forall m \in \mathbb{N} : g(m) > m, \forall m'' > g(m) : f(m'') \geq f(g(m))$$

Setze $p = g(0)$ und definiere rekursiv $n(k) = g^k(p)$. Dann ist n streng monoton wachsend, denn

$$n(k+1) = g(n(k)) > n(k).$$

Setze $h = f \circ n$. Zu zeigen ist noch, dass h monoton wachsend ist. Sei $k < k'$. Wähle ℓ so, dass $n(k) = g(\ell) < n(k')$. Dann gilt

$$h(k) = f(n(k)) = f(g(\ell)) \leq f(n(k')) = h(k').$$

Die Ungleichung folgt genau aus der definierenden Eigenschaft von g mit $m'' = n(k')$.

Fall 2. Ähnlich. Man wählt hier m wie in der Aussage des Falles 2 gegeben, dann wendet man des Auswahlaxiom auf die Aussage

$$\forall m' > m \exists m'' > m' : f(m'') < f(m')$$

an und iteriert die erhaltene Funktion beginnend mit dem Punkt $p = m + 1$. □

◇ ————— Ende Vorlesung 10, 06.11.2014 ————— ◇

Bisher haben wir die Zahlensysteme \mathbb{N} , \mathbb{Y} und $\overline{\mathbb{X}}$ eingeführt. Mit diesen Zahlensystemen können wir Folgen $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ definieren. Nach dem Potenzmen-genaxiom (Regel 39) gibt es eine Menge \mathbb{F} , sodass $f \in \mathbb{F}$ genau dann, wenn $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$. \mathbb{F} ist also die Menge aller Folgen erweiterter positiver reeller Zahlen.

Sind $f, g \in \mathbb{F}$, dann definiere $h =: f + g$ durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : h(n) = f(n) + g(n) .$$

Kommutativität und Assoziativität sind einfach zu zeigen. Außerdem gibt es eine ausgezeichnete Folge f , die als *Nullfolge* bezeichnet wird und für die gilt:

$$\forall g \in \mathbb{F} : g + f = g .$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass diese Folge f durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = 0$$

definiert sein muss.

Auslöschung ist wie folgt gültig: falls $\forall n \in \mathbb{N} : g(n) \neq \infty$, dann gilt

$$f + g = h + g \text{ genau dann wenn } f = h .$$

Definition 3.26 (Ordnung). Für zwei Folgen $f, g \in \mathbb{F}$ definieren wir $f \leq g$, falls

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq g(n) .$$

Die Ordnung erfüllt die folgenden Eigenschaften:

1. $f \leq g$ g.d.w. $\exists h \in \mathbb{F}$ mit $f + h = g$.

2. Falls $\forall n \in \mathbb{N} : g(n) \neq \infty$, dann $f + g \leq h + g$ g.d.w. $f \leq h$.
3. Transitivität: $f \leq g \wedge g \leq h \Rightarrow f \leq h$.
4. Antisymmetrie: $f \leq g \wedge g \leq f \Rightarrow f = g$.
5. Keine Totalität: es gibt $f, g \in \mathbb{F}$ mit weder $f \leq g$ noch $g \leq f$.

Die Operationen \sup, \inf, \limsup und \liminf , die wir bereits eingeführt haben, können als Funktionen von \mathbb{F} nach $\overline{\mathbb{X}}$ gesehen werden. Zum Beispiel:

$$\sup(f) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

Satz 3.27. Die Funktion \sup ist monoton, d.h.

$$f \leq g \Rightarrow \sup f \leq \sup g.$$

Beweis. $\sup(f)$ ist die kleinste obere Schranke von $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Es genügt zu zeigen: $\sup(g)$ ist auch eine obere Schranke. Dafür müssen wir zeigen, dass

$$\forall n : f(n) \leq \sup(g).$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist $f(n) \leq g(n) \leq \sup(g)$. □

Für die Funktion $\inf : \mathbb{F} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ gilt eine ähnliche Aussage:

Satz 3.28. Sei $f, g \in \mathbb{F}$, dann $f \leq g \Rightarrow \inf(f) \leq \inf(g)$.

Beweis. Übung. □

Satz 3.29 (Subadditivität). Es seien $f, g \in \mathbb{F}$, dann gilt

$$\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g).$$

Beweis. Ähnlich wie oben, ist zu zeigen:

$$\forall n : (f + g)(n) \leq \sup(f) + \sup(g).$$

Das folgt aus $f(n) \leq \sup(f)$ und $g(n) \leq \sup(g)$. □

Beispiel. Definiere

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann $\sup(f + g) = 1 < 2 = \sup(f) + \sup(g)$. Das Beispiel zeigt, dass man im Satz 3.29 keine Gleichheit erwarten kann.

Satz 3.30. Sei $f, g \in \mathbb{F}$, dann

$$\inf(f + g) \geq \inf(f) + \inf(g).$$

Beweis. Übung. □

Für manche Folgen gilt Gleichheit im Satz 3.29.

Satz 3.31. Sind $f, g \in \mathbb{F}$ monoton wachsend, dann gilt

$$\sup(f + g) = \sup(f) + \sup(g).$$

Beweis. “ \leq ” ist schon bewiesen. Wir brauchen nur “ \geq ” zu zeigen. Zuerst beobachten wir, dass es zwei Fälle gibt:

Fall 1: $\sup(f) < \infty$ und $\sup(g) < \infty$,

Fall 2: $\sup(f) = \infty$ oder $\sup(g) < \infty$.

Zu Fall 1: wir haben

$$\forall \varepsilon, \exists n, \forall m > n : \sup(f) \leq f(m) + \varepsilon,$$

und

$$\forall \varepsilon, \exists n', \forall m > n' : \sup(g) \leq g(m) + \varepsilon.$$

Was wir zeigen müssen ist: $\forall \eta > 0, \sup(f + g) + \eta \geq \sup(f) + \sup(g)$. Sei η gegeben, wähle ε , sodass $\varepsilon + \varepsilon = \eta$. Wähle n, n' wie oben. Dann sei $m > \max\{n, n'\}$. Es gilt

$$\sup(f) + \sup(g) \leq f(m) + \varepsilon + g(m) + \varepsilon \leq \sup(f + g) + \eta.$$

Wir überlassen dem Leser Fall 2 als Übung. □

Satz 3.32. Sind $f, g \in \mathbb{F}$ monoton fallend, dann

$$\inf(f + g) = \inf(f) + \inf(g).$$

Beweis. Übung. □

Satz 3.33. *Es seien $f, g \in \mathbb{F}$. Dann gilt*

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(m) + \sum_{m=0}^{\infty} g(m) = \sum_{m=0}^{\infty} (f + g)(m).$$

Beweis. Das folgt aus dem vorherigen Satz und der Tatsache, dass die Folgen $h(m) := \sum_{k \in I_m} f(k)$ und $h'(m) := \sum_{k \in I_m} g(k)$ monoton wachsend sind. \square

Satz 3.34. *Sei $f, g \in \mathbb{F}$. Dann*

$$\limsup f + \limsup g \geq \limsup(f + g).$$

Beweis. Erinnerung:

$$\limsup f := \inf_n [\sup_k f(n + k)].$$

Es gilt

$$\forall n : \sup_k (f + g)(n + k) \leq \sup_k f(n + k) + \sup_k g(n + k).$$

Nun kann man die Funktion $\inf : \mathbb{F} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ auf beiden Seiten anwenden und erhält die Behauptung, da die Folgen $\sup_k f(n + k)$, $\sup_k g(n + k)$ und auch $\sup_k (f + g)(n + k)$ monoton fallend sind. \square

Satz 3.35. *Falls $f, g \in \mathbb{F}$, dann gilt*

$$\liminf f + \liminf g \leq \liminf(f + g).$$

Beweis. Übung. \square

Per Induktion kann man all diese Aussagen auch leicht auf endlich viele Summanden erweitern. So gilt zum Beispiel für $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}$:

$$\sup \left(\sum_{n=0}^N f_n \right) \leq \sum_{n=0}^N \sup f_n.$$

Bisher haben wir Folgen definiert und studiert. Wir können auch Folgen von Folge definieren. Eine Folge von Folgen ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$, also f_n selbst wieder eine Folge ist. $f_n(m)$ ist das m -te Glied der Folge f_n . Man kann sich die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$ auch als eine

Funktion in zwei Variablen vorstellen.

Für $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$, definiere

$$(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(m) := \sup_{n \in \mathbb{N}} (f_n(m)).$$

Das ist eine punktweise Definition; genau wie Addition und Ordnung auch punktweise definiert sind. Ähnlich kann man auch $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ und $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ definieren.

Satz 3.36. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$. Dann gilt

$$\sup_n [\sup_m f_n(m)] = \sup_m [\sup_n f_n(m)].$$

Beweis. Wir beweisen nur " \leq ". " \geq " ist ähnlich. Es genügt zu zeigen

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sup_m f_k(m) \leq \sup_m [\sup_n f_n(m)].$$

Sei k gegeben. Im Satz 3.27 haben wir schon bewiesen, dass die Funktion $\sup : \mathbb{F} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ monoton ist. Deshalb brauchen wir nur zu zeigen, dass

$$\forall m \in \mathbb{N} : f_k(m) \leq \sup_n f_n(m).$$

Das ist nach Definition von \sup trivial. □

Satz 3.37. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$. Dann ist

$$\inf_n [\inf_m f_n(m)] = \inf_m [\inf_n f_n(m)].$$

Beweis. Übung. □

Satz 3.38. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$. Dann gilt

$$\sup_n [\inf_m f_n(m)] \leq \inf_m [\sup_n f_n(m)].$$

Beweis. Für all $m', n' \in \mathbb{N}$, gilt

$$\inf_m f_{n'}(m) \leq f_{n'}(m') \leq \sup_n f_n(m').$$

Für festes m' haben wir

$$\sup_{n'} \inf_m f_{n'}(m) \leq \sup_n f_n(m'),$$

da das Supremum die kleinste obere Schranke ist. Weil das Infimum die größte untere Schranke ist, haben wir

$$\sup_{n'} \inf_m f_{n'}(m) \leq \inf_{m'} \sup_n f_n(m').$$

□

Für \limsup gilt eine analoge Vertauschungsregel nicht im Allgemeinen.

Beispiel. Definiere $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(m) = \begin{cases} 0, & m < n \\ 1, & m \geq n \end{cases}$$

Dann gilt

$$\forall m : \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(m) = 0$$

und

$$\forall n : \limsup_{m \rightarrow \infty} f_n(m) = 1.$$

Deshalb ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} f_n(m) \neq \limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(m),$$

trotz der Tatsache dass $f_n(m)$ für festes n in m monoton wachsend ist und für festes m in n monoton fallend ist. (Wäre $f_n(m)$ allerdings sowohl für festes n monoton wachsend in m als auch für festes m monoton wachsend in n , dann könnte man \limsup durch \sup ersetzen und Satz 3.36 anwenden.)

3.3 Konvergenzsätze

Satz 3.39 (Monotone Konvergenz von Reihen). *Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$ monoton wachsend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : g_n \leq g_{n+1}$, oder äquivalent:*

$$\forall n, \forall m : g_n(m) \leq g_{n+1}(m).$$

Dann ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) \text{ monoton wachsend in } n, \tag{12}$$

d.h.

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) \leq \sum_{m=0}^{\infty} g_{n+1}(m),$$

und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(m). \tag{13}$$

Beweis. Zuerst beweisen wir (12). Sei $M \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist (durch Induktion nach M)

$$\sum_{m=0}^M g_n(m) \leq \sum_{m=0}^M g_{n+1}(m).$$

Man beachte, dass beide Seiten monoton wachsend in M sind. Deshalb können wir sup anwenden, woraus folgt:

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) \leq \sum_{m=0}^{\infty} g_{n+1}(m).$$

Zu (13): aus (12) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) = \sup_n \left[\sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) \right].$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sup_n \left[\sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) \right] &= \sup_n \left[\sup_M \sum_{m=0}^M g_n(m) \right] \\ &= \sup_M \left[\sup_n \sum_{m=0}^M g_n(m) \right] \\ &= \sup_M \sum_{m=0}^M \sup_n g_n(m). \end{aligned} \tag{14}$$

In (14) haben wir Satz 3.31 benutzt, in der Form für endlich viele Summanden. Dann folgt (13), da $\sup_n g_n(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(m)$. □

◇ ————— Ende Vorlesung 11, 11.11.2014 ————— ◇

Beispiel. Nach der binomischen Formel gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n} \right)^k$$

Die rechte Seite können wir umformen als

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) =: \sum_{k=0}^{\infty} g_n(k) \end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichung haben wir benutzt, dass $1 - \frac{k-1}{n} = 0$ für $k = n+1$. Da ein Produkt null ist, sobald einer der Faktoren null ist, verschwindet der Summand der Reihe also für alle $k \geq n+1$.

Jetzt impliziert der Satz der monotonen Konvergenz angewendet auf g_n die folgende berühmte Formel, die schon Euler bekannt war:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Den Grenzwert in dieser Gleichung nennt man e , die *Euler'sche Zahl*. Man bemerke, dass wir noch nicht gezeigt haben, dass diese Zahl endlich ist (Übung).

Satz 3.40 (Fubini-Tonelli). *Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$. Dann gilt*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_n(m).$$

Beweis. Setze $f_n(m) = \sum_{k=0}^n g_k(m)$. Dann ist f_n monoton. Also können wir den Satz der monotonen Konvergenz auf f_n anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N g_n(m) &= \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(m) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_N(m) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N g_n(m) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass der Grenzwert mit endlichen Summen kommutiert. Dies folgt im Fall von zwei Summanden bewiesen aus den Sätzen 3.34 und 3.35 und es folgt für endlich viele Summanden per Induktion. \square

Vorsicht! Wenn wir später auch negative Folgenglieder erlauben, vertauscht die Summationsreihenfolge im Allgemeinen nicht mehr ohne weitere Voraussetzung. Die im Beweis definierte Folge f_n ist dann nämlich nicht mehr notwendigerweise monoton.

Satz 3.41 (Fatou). Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$. Dann haben wir

$$\sum_{m=0}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(m) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{M \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^M \sup_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{\inf_{k \in \mathbb{N}} f_{n+k}(m)}^{\text{monoton in } n} \stackrel{\text{Satz 3.31}}{=} \sup_{M \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^M \inf_{k \in \mathbb{N}} f_{n+k}(m) \\ &\stackrel{\text{Satz 3.30}}{\leq} \sup_{M \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^M f_{n+k}(m) \stackrel{\text{Satz 3.36}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{M \in \mathbb{N}} \inf_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^M f_{n+k}(m) \\ &\stackrel{\text{Satz 3.38}}{\leq} \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{M \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^M f_{n+k}(m) \stackrel{\text{Def.}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) \end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei

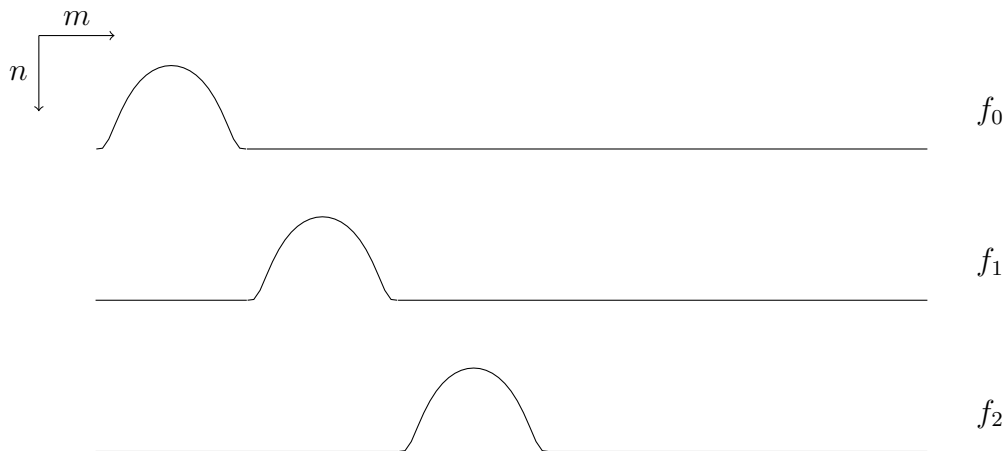
$$f_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann haben wir

$$\sum_{m=0}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(m) = 0 < 1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m).$$

Also ist die Ungleichung in Fatou's Satz im Allgemeinen keine Gleichheit.

Um Fatou's Satz etwas mehr intuitiven Sinn einzuhauchen, ist eine physikalische Interpretation hilfreich. Man stelle sich n als die Zeit vor, m als Ort im Raum und $f_n(m)$ als eine Größe die den Zustand irgendeines physikalischen Systems zur Zeit n am Punkt m beschreibt, etwa die Massedichte.



Die Abbildung entspricht im Wesen dem obigen Beispiel. Entsprechend der physikalischen Interpretation ist der Raum (in horizontaler Richtung) dabei jedoch kontinuierlich dargestellt. Die Masse bleibt in diesem Beispiel zu jedem Zeitpunkt konstant ("Massenerhaltung"), wir haben $\sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) = 1$ für alle n . Also ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) = 1$. Wählen wir jedoch einen festen Punkt im Raum m , so ist nach einer gewissen Zeit die Masse am Punkt m vorbei nach dem Unendlichen hin entschwinden, also ist $\sum_{m=0}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(m) = 0$.

Der Satz von Fatou drückt also aus, dass asymptotisch im Zeitgrenzwert Masse zwar verschwinden kann, aber niemals erzeugt wird. Dies stimmt mit unserer physikalischen Intuition überein und lässt sich deswegen einfach memorieren.

Satz 3.42 (Dominierte Konvergenz). *Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$ mit*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n,$$

d.h. wir haben punktweise Konvergenz der f_n , also

$$\forall m : \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(m) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(m).$$

Weiter nehmen wir an, dass es eine dominierende Folge $b : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ gibt mit $\forall n : f_n \leq b$, also $\forall n \forall m : f_n(m) \leq b(m)$, sodass $\sum_{m=0}^{\infty} b(m) < \infty$. Dann

1. konvergiert die Folge $\sum_{m=0}^{\infty} f_n(m)$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) \text{ und}$$

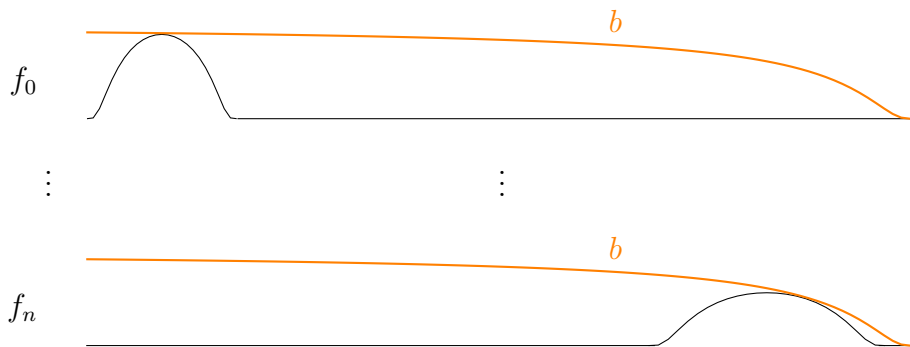
2. der Grenzwert entspricht der Summe der Grenzwerte:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m)$$

Beweis. Übung.

□

Der Satz fügt sich sehr gut in das vorherige Bild ein.



Die Folgen f_n sind gezwungen unter der dominierenden “Hüllfolge” b zu bleiben. Daher kann ihre Masse nicht nach Unendlich entweichen.

4 Negative Zahlen

Negative Zahlen kann man durch “Geben und Nehmens” in wirtschaftlichen Transaktionen motivieren. Obwohl es nur positive Geldmünzen gibt, kann man positive und negative Geldbeträge verwirklichen. Eine Transaktion besteht aus einem Paar von positiven reellen Zahlen. Die erste Zahl kann man sich dabei als eine eingenommene Geldsumme (“Gewinn”) und die Zweite als eine abgegebene Geldsumme (“Verlust”) vorstellen. Diese Interpretation motiviert das Folgende.

Definition 4.1. Eine Funktion $x : \overbrace{I_2}^{\{0,1\}} \rightarrow \mathbb{X}$ ist ein *geordnetes Paar* (positiver reeller Zahlen). Wir schreiben $x = (x_1, x_2)$ wobei $x_1 = x(0)$ und $x_2 = x(1)$ gesetzt ist.

Man beachte, dass wir ∞ hier explizit ausgeschlossen haben. Nach dem Potenzmengenaxiom existiert die Menge A aller geordneten Paare.

Satz 4.2. *Es gibt eine Menge \mathbb{R} und eine Surjektion*

$$\beta : A \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\forall x, y \in A : \beta(x) = \beta(y) \text{ g.d.w. } x_1 + y_2 = x_2 + y_1.$$

Zum Beweis brauchen wir folgende Beobachtungen. Schreibe $x \sim y$ (x äquivalent y) falls $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$. Dann gelten

1. $\forall x : x \sim x$ (Richtig, da $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.)

2. $\forall x, y : x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (falls $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$, dann ist $y_1 + x_2 = y_2 + x_1$)

3. $\forall x, y, z : x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Wenn $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ und $y_1 + z_2 = y_2 + z_1$, dann

$$x_1 + (y_2 + y_1) + z_2 = x_2 + (y_1 + y_2) + z_1$$

Da $y_1 + y_2 < \infty$ folgt nach Auslöschung $x_1 + z_2 = x_2 + z_1$, also $x \sim z$.

Ganz allgemein nennt man ein \sim mit den Eigenschaften 1,2,3 eine *Äquivalenzrelation*. Der Satz gilt ganz allgemein für Äquivalenzrelationen. Um ihn zu beweisen werden nur die Eigenschaften 1,2,3 benötigt (Übung).

Die Menge \mathbb{R} ist in gewisser Weise eindeutig bestimmt. Darauf möchten wir an dieser Stelle jedoch nicht weiter eingehen. Stattdessen wählen wir jetzt ein für alle mal ein solches \mathbb{R} wie im Satz beschrieben. Die Menge \mathbb{R} ist die *Menge der reellen Zahlen*.

Ist $a, b \in \mathbb{R}$ wähle $x, y \in A$ mit $\beta(x) = a, \beta(y) = b$, dann hängt $\beta(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ nicht von der Wahl von x und y ab.

Beweis. Seien auch $x', y' \in A$, sodass $\beta(x') = a, \beta(y') = b$. Zu zeigen ist $\beta(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \beta(x'_1 + y'_1, x'_2 + y'_2)$. Wir wissen

$$x_1 + x'_2 = x_2 + x'_1, y_1 + y'_2 = y_2 + y'_1.$$

Durch Addition folgt $x_1 + x'_2 + y_1 + y'_2 = x_2 + x'_1 + y_2 + y'_1$. □

Damit dürfen wir

$$a + b := \beta(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

definieren. Die Unabhängigkeit von der Wahl von x, y bedeutet, dass $a + b$ *wohldefiniert* ist.

Die so definierte Addition erfüllt wieder Kommutativität und Assoziativität (Übung). Es gibt auch ein neutrales Element: $\beta(0, 0)$, denn es gilt

$$\beta(x, y) + \beta(0, 0) = \beta(x + 0, y + 0) = \beta(x, y).$$

Anders als in $\overline{\mathbb{X}}$ gibt es in \mathbb{R} auch immer ein *inverses Element*, d.h. für $x, y \in A$ gilt

$$\beta(x, y) + \beta(y, x) = \beta(x + y, y + x) = \beta(0, 0).$$

Definition 4.3 (Ordnung auf \mathbb{R}). Für $a, b \in \mathbb{R}$ wähle $x, y \in A$ mit $\beta(x) = a, \beta(y) = b$. Setze $a \leq b$, falls

$$x_1 + y_2 \leq x_2 + y_1. \tag{15}$$

Wieder müssen wir Wohldefiniertheit zeigen, d.h. dass die Definition nicht von der Wahl von x, y abhängt. Seien $x', y' \in A$ mit $\beta(x') = a, \beta(y') = b$. Dann gelten

$$x_1 + x'_2 = x_2 + x'_1 \tag{16}$$

$$y_1 + y'_2 = y_2 + y'_1 \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Zu zeigen ist $x'_1 + y'_2 \leq x'_2 + y'_1$. Addition von (15), (16), (17) ergibt

$$x_1 + y_2 + x_2 + x'_1 + y_1 + y'_2 \leq x_2 + y_1 + x_1 + x'_2 + y_2 + y'_1$$

Wegen $x_1 + y_2 + x_2 + y_1 < \infty$ folgt nach Auslöschung $x'_1 + y'_2 \leq x'_2 + y'_1$. Für die so definierte Ordnung gelten die bekannten Eigenschaften, Reflexivität und Transitivität. Außerdem gilt Verträglichkeit mit der Addition: $a + c \leq b + c$ gilt genau dann, wenn $a \leq b$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Man erinnere sich, dass für $x, y \in \overline{\mathbb{X}}$ gilt: $x \leq y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R} : x + z = y$. Dagegen gibt es aber für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a + c = b$. Denn falls $a = \beta(x), b = \beta(y)$, dann wähle einfach $c = \beta(y_1 + x_2, x_1 + y_2)$. Dann gilt tatsächlich

$$\beta(x_1, x_2) + \beta(y_1 + x_2, x_1 + y_2) = \beta(x_1 + y_1 + x_2, x_2 + x_1 + y_2) = \beta(y_1, y_2).$$

Satz 4.4. *Jedes Element in \mathbb{R} ist von der Form $\beta(x, 0)$ oder $\beta(0, y)$ für $x, y \in \mathbb{X}$.*



Von nun an identifizieren wir \mathbb{X} stillschweigend in der natürlich gegebenen Weise mit der Teilmenge von \mathbb{R} , die durch $\{\beta(x, 0) : x \in \mathbb{X}\}$ gegeben ist.

Dieser Satz charakterisiert die Struktur von \mathbb{R} .

Analog zur Bildung des Raumes der Differenzen zweier Zahlen in $\overline{\mathbb{X}}$ wie oben kann man auch den Raum aller Differenzen von Elementen in \mathbb{F} bilden. Ein analoger Satz wie der Letzte gilt aber nicht für diesen Raum von reellen Folgen.

◇ ————— Ende Vorlesung 12, 13.11.2014 ————— ◇

Bemerkungen zum Minuszeichen: Wir haben die reellen Zahlen als Paare von nichtnegativen reellen Zahlen eingeführt: zu einem Paar (x, y) von Zahlen in

\mathbb{X} gibt es eine reelle Zahl $\beta(x, y)$, hierbei gilt $\beta(x, y) = \beta(x', y')$ genau dann wenn $x + y' = x' + y$.

Das Minuszeichen wird benutzt, um die Ordnung des Paares zu vertauschen, d.h. wir definieren

$$-\beta(x, y) := \beta(y, x)$$

Dies so benutzte Minuszeichen ist eine einstellige Operation, d.h. wirkt nur auf einer reellen Zahl a und macht daraus $-a$.

Man benutzt das Minuszeichen auch als zweistellige Operation oder mehrstellige Operation, in dem Sinne

$$a - b := a + (-b).$$

$$a - b - c := a + (-b) + (-c).$$

Man beachte, dass das Minuszeichen selbst nicht kommutativ oder assoziativ ist: im Allgemeinen gilt nicht $a - b = b - a$ und auch nicht $(a - b) - c = a - (b - c)$. Korrekte Anwendung des Kommutativgesetzes ergibt

$$a - b = a + (-b) = (-b) + a =: -b + a$$

Nach Definition sehen wir außerdem, dass

$$\beta(x, y) = x - y.$$

Der *Absolutbetrag* einer reellen Zahl a ist definiert als

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Satz 4.5 (Dreiecksungleichung). *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Beweis. Übung. □

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls $\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in M$, sodass

$$|a| \leq b.$$

Vollständigkeit von $\overline{\mathbb{X}}$ (d.h. Existenz eines Supremums und eines Infimums) überträgt sich auf \mathbb{R} wie folgt:

Satz 4.6 (Vollständigkeit von \mathbb{R}). *Jede beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} hat ein Supremum und ein Infimum.*

Supremum, Infimum, Limes inferior und Limes superior für Folgen auf \mathbb{R} haben ähnliche Eigenschaften wie im Falle von $\overline{\mathbb{X}}$. Wir werden dies nicht noch einmal im Einzelnen zeigen. Um Grenzwertsätze von $\overline{\mathbb{X}}$ auf \mathbb{R} zu übertragen, ist häufig die folgende Beobachtung hilfreich: Ist $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt, so gibt es ein $b \in \overline{\mathbb{X}}$, sodass $\forall x \in M \exists y \in \overline{\mathbb{X}} : x = \beta(y, b)$.

Was den Zusammenhang zwischen Folgen und Folgen der Inkremente oder umgekehrt Folgen und entsprechenden Partialsummen angeht gibt es einige neue Phänomene auf \mathbb{R} , auf die wir jetzt eingehen werden.

Auf $\overline{\mathbb{X}}$ hatten wir festgestellt, dass es zu jeder monotonen Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ (und nur zu einer monotonen Folge) gibt es eine Inkrementfolge $g : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$, d.h. $\forall n : f_{n+1} = f_n + g_n$, $f_{n+1} = f_0 + \sum_{k=0}^n g_k$.

Hingegen haben wir auf \mathbb{R} : Jede Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine Inkrementfolge $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben $g_n = \beta(c_n, d_n)$ und $f_n = \beta(a_n, b_n)$ mit $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{F}$. Dann ist

$$f_{n+1} = \beta \left(a_0 + \sum_{k=0}^n c_k, b_0 + \sum_{k=0}^n d_k \right).$$

Also sehen wir:

Jede Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Differenz zweier monoton wachsender Folgen mit Werten in \mathbb{X}

Obwohl jedoch jede monotone Folge mit Werten in $\overline{\mathbb{X}}$ konvergiert (möglicherweise uneigentlich), konvergiert trotzdem nicht jede Folge. Das Problem tritt auf, wenn die Grenzwerte der beiden monotonen Folgen ∞ sind. Wie wir bereits gesehen haben, macht es keinen Sinn dem Ausdruck $\infty - \infty$ eine Bedeutung geben zu wollen.

Diese Überlegung motiviert die folgenden Definitionen.

Definition 4.7. Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von *beschränkter Variation*, falls sie Differenz zweier beschränkter monoton wachsender Folgen ist.

Definition 4.8. Eine Folge $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *absolut summierbar*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n| < \infty$.

Satz 4.9. *Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist von beschränkter Variation genau dann, wenn ihre Inkrementfolge absolut summierbar ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei f_n von beschränkter Variation. Dann ist $f_n = a_n - b_n$, wobei a_n, b_n monoton wachsende, beschränkte Folgen sind. Seien c_n, d_n die Inkrementfolgen von a_n bzw. b_n , d.h. $a_{n+1} = a_n + c_n$ und $b_{n+1} = b_n + d_n$.

Dann gilt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sup_n a_n < \infty$ und genauso $\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sup_n b_n < \infty$, da a_n, b_n beschränkt sind. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k - d_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| + | - d_k| = \sum_{k=0}^{\infty} c_k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k < \infty.$$

Aber $c_n - d_n$ ist die Inkrementfolge von f_n , denn

$$f_n + c_n - d_n = a_n - b_n + c_n - d_n = a_{n+1} - b_{n+1} = f_{n+1}.$$

, \Leftarrow ': Sei g die Inkrementfolge von f und sei g absolut summierbar. Setze

$$h(n) = \begin{cases} g(n), & \text{falls } g(n) \geq 0, \\ 0, & \text{falls } g(n) < 0. \end{cases}$$

Die Folgen h und $h - g$ sind damit nach Definition positiv und es gilt

$$g(n) = h(n) + (g(n) - h(n)).$$

Setze $a(n) = \sum_{k=0}^n h(k)$ und $b(n) = \sum_{k=0}^n h(k) - g(k)$. Dann sind a, b monoton wachsende und beschränkte Folgen und es gilt

$$f(n+1) = f(0) + a(n) - b(n).$$

Je nachdem ob $f(0)$ positiv oder negativ ist, kann man es als Konstante zu a oder b addieren und erhält dann f als Differenz zweier monoton wachsender Folgen mit nichtnegativen Werten. \square

4.1 Umordnung von Reihen

Satz 4.10. *Ist $g : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ eine Folge und $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injektiv, dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(n(k)) \leq \sum_{m=0}^{\infty} g(m).$$

Beweis. Für $\kappa \in \mathbb{N}$ setze

$$b_{\kappa}(n) = \begin{cases} g(n), & \text{falls } \exists k < \kappa \text{ mit } n = n(k), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$a_{\kappa}(n) = \begin{cases} g(n), & \text{falls } n = n(\kappa), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $b_{\kappa+1}(n) = b_\kappa(n) + a_\kappa(n)$. Außerdem ist klar, dass $\sum_{m=0}^{\infty} a_\kappa(m) = g(n(\kappa))$. Per Induktion nach κ folgert man daraus

$$\sum_{n=0}^{\kappa} g(n(k)) = \sum_{m=0}^{\infty} b_\kappa(m).$$

Da stets $b_\kappa(n) \leq g(n)$ gilt, erhalten wir damit

$$\sum_{k=0}^{\kappa} g(n(k)) \leq \sum_{m=0}^{\infty} g(m).$$

Durch Bilden des Supremums über κ auf beiden Seiten folgt die Behauptung. \square

Satz 4.11. *Ist $g : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ eine Folge und $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(n(k)) = \sum_{m=0}^{\infty} g(m).$$

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe, man verwende das gleiche Argument wie eben für die Umkehrfunktion von n .

Satz 4.12. *Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ absolut summierbar und $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Dann gilt*

$$\sum_{m=0}^{\infty} g(m) = \sum_{k=0}^{\infty} g(n(k)).$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $g_n = a_n - b_n$ mit $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ und $\sum_{m=0}^{\infty} a_m < \infty$, sowie $\sum_{m=0}^{\infty} b_m < \infty$. Nach dem vorigen Satz gilt also

$$\sum_{m=0}^{\infty} g(m) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m) - \sum_{m=0}^{\infty} b(m) = \sum_{k=0}^{\infty} a(n(k)) - \sum_{k=0}^{\infty} b(n(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} g(n(k)).$$

\square

Vorsicht! Dieser Satz ist völlig falsch, wenn man die Annahme der absoluten Summierbarkeit weglässt.

Definition 4.13. Eine Folge $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *summierbar*, falls $f_{n+1} := \sum_{k=0}^n g(k)$ gegen eine Zahl in \mathbb{R} konvergiert.

Nicht alle summierbaren Folgen sind auch absolut summierbar. Viele Beispiele dafür liefert der folgende Satz.

Satz 4.14 (Leibniz-Kriterium). Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ monoton fallend mit $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(n) = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (-1)^n g(n) \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $(-1)^n g(n) = g(n)$ für gerade n und $(-1)^n g(n) = -g(n)$ für ungerade n .

Beispiele. • Die Folge $g(n) = \frac{1}{n}$ ist monoton fallend und konvergiert gegen 0. Also konvergiert die *alternierende harmonische Reihe*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Wir werden noch sehen, dass der Grenzwert $\ln(2)$ ist. Aber g ist *nicht* absolut summierbar, denn die harmonische Reihe divergiert bekanntermaßen (Übung):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

• Die *Leibniz-Reihe* konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Beweis von Satz 4.14. Setze $a_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k g_k$ und $b_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k g_k$. Dann ist (a_n) monoton wachsend:

$$a_{n+1} = a_n + \underbrace{g_{2n+2} - g_{2n+3}}_{\geq 0} \geq a_n.$$

Genauso ist (b_n) monoton fallend. Wir behaupten, dass außerdem $a_n \leq b_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt. Wähle nämlich $k > n, m$. Dann gilt

$$a_n \leq a_k = b_k - g_{2k+1} \leq b_k \leq b_m.$$

Daraus folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n \leq \inf_n b_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Jetzt genügt es zu zeigen, dass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \tag{19}$$

Daraus folgt dann einerseits die Konvergenz der Folgen a_n, b_n (die natürlich ohnehin bereits klar ist) und andererseits aber auch Gleichheit der Grenzwerte der Folgen a_n und b_n . Man sieht leicht ein, dass dies dann auch der Grenzwert der alternierenden Reihe ist. Kommen wir also zum Beweis von (19). Da (a_n) monoton wachsend und (b_n) monoton fallend ist, gilt

$$\forall m : \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq b_m, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a_m.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle m , sodass $g(2m+2) < \varepsilon$. Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq b_{m+1} = a_m + g_{2m+2} < a_m + \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 4.15. Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht absolut summierbar aber summierbar in \mathbb{R} , d.h.

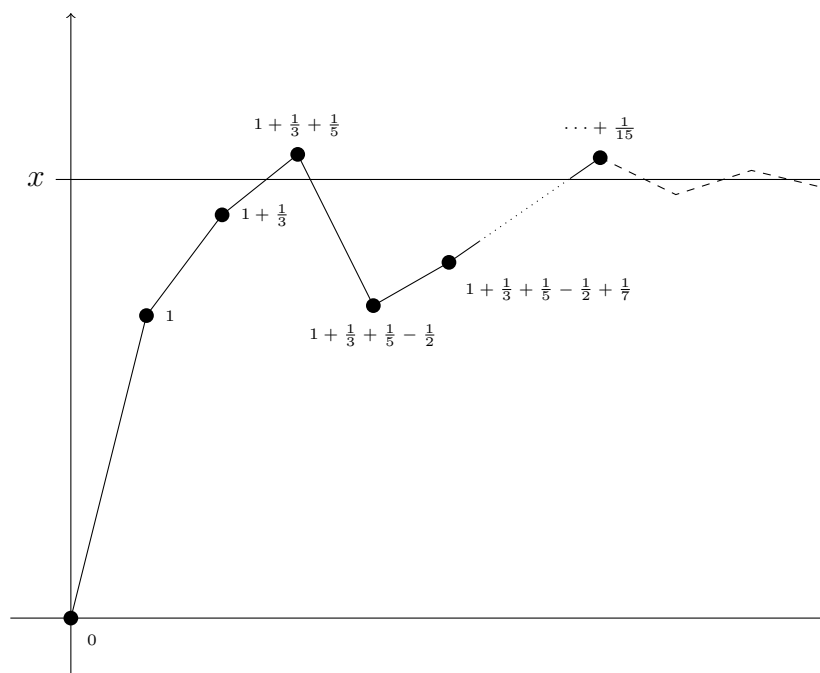
$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n) \text{ existiere in } \mathbb{R}.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Bijektion $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(n(k)) = x.$$

Dieser Satz besagt, dass eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist so umsortiert werden kann, dass ihr Grenzwert einen beliebigen gewählten Wert annimmt. Die Aussage des Umordnungssatzes 4.12 kann also ohne die Voraussetzung der absoluten Summierbarkeit in keiner Weise gerettet werden.

Statt eines formalen Beweises möchten wir die Beweisidee anhand eines Bildes illustrieren.



In der Abbildung ist exemplarisch dargestellt, wie eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \pm \dots$$

zu erfolgen hat, um gegen den eingezeichneten Grenzwert $x \approx \frac{3}{2}$ zu konvergieren. Zunächst summiert man nur positive Folgenglieder bis der gewünschte Grenzwert gerade überschritten wird. Dann addiert man negative Folgenglieder bis der Grenzwert gerade unterschritten wird, usw. Da die Folgenglieder gegen 0 konvergieren ist es zumindest plausibel, dass die Abweichung zum gewünschten Grenzwert letztendlich immer kleiner wird und gegen 0 konvergiert. Anbendererseits folgt aus der nicht absoluten Summierbarkeit dass man immer es genügend viele positive und negative Folgenglieder findet, um zu jedem Zeitpunkt den Wert x wieder über- oder unterschreiten zu können.

◇ ————— Ende Vorlesung 13, 18.11.2014 ————— ◇

5 Stetige Funktionen

Wir haben bisher bereits Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ diskutiert. Wir gehen jetzt dazu über, Funktionen $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ zu besprechen.

Erneut spielen die Funktionen, die die additive oder die Ordnungsstruktur erhalten, eine besondere Rolle.

Definition 5.1. Eine Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *additiv*, falls

$$\forall x, y \in \mathbb{Y} : f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Satz 5.2. Für jedes $a \in \mathbb{R}$, gibt es genau eine additive Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(1) = a$.

Beweis. Eine analoge Aussage haben wir schon bewiesen für Folgen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Behauptung 1: Für alle $b \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine additive Funktion $f : \mathbb{Y}_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\frac{1}{2^k}) = b$.

Beweis der Behauptung 1. Es gibt eine Bijektion $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Y}_k$ mit $g(n) = \frac{n}{2^k}$ und es gibt genau eine additive Funktion $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(1) = b$. Setze

$$f = h \circ g^{-1}.$$

Dann ist f additiv, da h and g^{-1} additiv sind. Es ist auch einfach zu sehen, dass

$$f(\frac{1}{2^k}) = b.$$

Es bleibt zu zeigen, dass f eindeutig ist: Seien f, \tilde{f} zwei additive Funktionen $\mathbb{Y}_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\frac{1}{2^k}) = b = \tilde{f}(\frac{1}{2^k}).$$

Dann sind $f \circ g$ und $\tilde{f} \circ g$ additive Funktionen mit

$$\tilde{f} \circ g(1) = b = f \circ g(1).$$

Wegen Eindeutigkeit der additiven Funktion auf \mathbb{N} gilt $f \circ g = \tilde{f} \circ g$, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(g(n)) = \tilde{f}(g(n)),$$

woraus folgt

$$\forall y \in \mathbb{Y}_k : f(y) = \tilde{f}(y).$$

□

Behauptung 2: Für jedes $k \in \mathbb{N}$, gibt es genau eine additive Funktion $f : \mathbb{Y}_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(1) = a$.

Beweis der Behauptung 2. Induktion nach k . Für $k = 0$, gilt $\frac{1}{2^k} = 1$. Deshalb können wir Behauptung 1 anwenden.

Induktionsannahme: Sei k so, dass es genau eine Funktion $f_k : \mathbb{Y}_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(1) = a$ gibt. Wähle z so, dass

$$z + z = f_k\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

Sei f die eindeutige additive Funktion $f : \mathbb{Y}_{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = z$. Die Einschränkung von f auf \mathbb{Y}_k ist additiv und

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right) = f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) + f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = z + z = f_k\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

Wegen Eindeutigkeit auf \mathbb{Y}_k , haben wir $f|_{\mathbb{Y}_k} = f_k$, woraus folgt

$$f(1) = f_k(1) = a.$$

Zur Eindeutigkeit: Sei $f, \tilde{f} : \mathbb{Y}_{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(1) = a = \tilde{f}(1), \text{ und } f|_{\mathbb{Y}_k} = \tilde{f}|_{\mathbb{Y}_k}$$

nach Induktionsannahme. Insbesondere

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right) = \tilde{f}\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

Es gibt genau ein z mit

$$z + z = f\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

Da

$$f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) + f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = f\left(\frac{1}{2^k}\right),$$

folgt $f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = z$. Gleichfalls gilt für \tilde{f} : $\tilde{f}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = z$. Aus Behauptung 1 folgt $f = \tilde{f}$. \square

Nach diesen zwei Behauptungen sind wir bereit, Existenz und Eindeutigkeit einer Funktion mit

$$f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}, f(1) = a$$

zu beweisen. Existenz: Ist $y \in \mathbb{Y}$, so $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $y \in \mathbb{Y}_k$. Setze

$$f(y) = f_k(y).$$

Diese Definition hängt nicht von k ab: falls $k < k'$, dann

$$f_{k'}|_{\mathbb{Y}_k} = f_k$$

wegen Einschränkung von $f_{k'}$ auf \mathbb{Y}_k . Dass f additiv ist und $f(1) = a$ sind klar.

Eindeutigkeit: Sind $f, \tilde{f} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = \tilde{f}(1) = a$. Sei $y \in \mathbb{Y}$, dann $\exists k : y \in \mathbb{Y}_k$. Die Behauptung 2 impliziert

$$f|_{\mathbb{Y}_k} = f_k = \tilde{f}|_{\mathbb{Y}_k}.$$

Es folgt $f(y) = \tilde{f}(y)$, also $f = \tilde{f}$. □

Wir können jetzt das Produkt einer reellen mit einer dyadischen Zahl definieren.

Definition 5.3 (Multiplikation). Sind $a \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{Y}$, schreiben wir

$$a \cdot y = f(y),$$

wobei f die eindeutige additive Funktion mit $f(1) = a$ ist.

Es gelten die üblichen Regeln, zum Beispiel

Satz 5.4 (Kommutativgesetz). Für $a \in \mathbb{Y}$, $y \in \mathbb{Y}$, gilt

$$a \cdot y = y \cdot a.$$

Beweis. Fall 1. $a = 1$. Dann gilt $1 \cdot y = f(y)$, wobei f die eindeutige Funktion mit

$$f(1) = 1$$

ist, d.h. f ist die Identitätsfunktion. Deshalb gilt

$$1 \cdot y = y.$$

Aus der Definition der Multiplikation folgt direkt, dass

$$y \cdot 1 = y.$$

Also haben wir $1 \cdot y = y \cdot 1$.

Fall 2. a und y beliebig. Setze

$$g(x) = x \cdot a.$$

Wir haben schon bewiesen, dass

$$g(1) = 1 \cdot a = a.$$

Falls wir zeigen können, dass $g(x) = x \cdot a$ additiv ist, folgt

$$x \cdot a = g(x) = a \cdot x.$$

Additivität von g : es genügt zu zeigen, dass

$$y \cdot a + x \cdot a = (y + x) \cdot a.$$

Zuerst beobachte, dass nach Definition $(y+x) \cdot a$ additiv in a ist. Die Funktion $y \cdot a + x \cdot a$ ist auch additiv in a , da

$$y \cdot (a + b) + x \cdot (a + b) = y \cdot a + y \cdot b + x \cdot a + x \cdot b = y \cdot a + x \cdot a + y \cdot b + x \cdot b.$$

Für $a = 1$ haben wir

$$y \cdot 1 + x \cdot 1 = y + x = (y + x) \cdot 1.$$

Daraus folgt

$$y \cdot a + x \cdot a = (y + x) \cdot a$$

nach Eindeutigkeit additiver Funktion. □

Nun gehen wir dazu über, ordnungserhaltende Funktionen zu betrachten.

Definition 5.5. Eine Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, falls

$$\forall x \in \mathbb{Y}, y \in \mathbb{Y} \text{ mit } x \leq y : f(x) \leq f(y).$$

Eine Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend*, falls

$$\forall x \in \mathbb{Y}, y \in \mathbb{Y} \text{ mit } x < y : f(x) < f(y).$$

Beispiel. Die Funktion $f(x) = a \cdot x$ ist monoton wachsend für $a \geq 0$ und streng monoton wachsend für $a > 0$.

Definition 5.6. Sei f monoton wachsend. Dann ist der *linksseitige Grenzwert* definiert durch

$$\lim_{\nearrow} f(x) = \sup\{f(y) : y < x\}.$$

Der *rechtsseitige Grenzwert* ist definiert durch

$$\lim_{\searrow} f(x) = \inf\{f(y) : y > x\}.$$

Bemerke, dass $\lim_{\nearrow} f$ und $\lim_{\searrow} f$ wieder Funktionen sind.

Satz 5.7. *Es seien f und g zwei monoton wachsende Funktionen. Dann gilt*

1. $\lim_{\nearrow} f(x) \leq f$.
2. $\lim_{\nearrow} f$ ist monoton wachsend.
3. $\lim_{\nearrow} f \leq \lim_{\nearrow} g$ falls $f \leq g$.
4. $\lim_{\nearrow} f = \lim_{\nearrow}(\lim_{\nearrow} f)$.
5. $\lim_{\nearrow}(f + g) = \lim_{\nearrow} f + \lim_{\nearrow} g$.

Beweis. 1. $f(x)$ ist eine obere Schranke von $\{f(y) : x < y\}$ wegen Monotonie:

$$f(x) \geq \sup_{y < x} f(y) = \lim_{\nearrow} f(x).$$

2. Sind $x, y \in \mathbb{Y}$ mit $x < y$, dann gilt

$$\lim_{\nearrow} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x' < y} f(x') = \lim_{\nearrow} f(y).$$

3. Seien $x \in \mathbb{Y}, \varepsilon > 0$ gegeben. Es gibt $y_0 < x$ mit

$$\sup_{y < x} f(y) \leq f(y_0) + \varepsilon \leq g(y_0) + \varepsilon \leq \sup_{y < x} g(y) + \varepsilon.$$

Daraus folgt

$$\lim_{\nearrow} f(x) \leq \lim_{\nearrow} g(x) + \varepsilon,$$

für beliebige $\varepsilon > 0$.

4. Nach 1. und 3. folgt

$$\lim_{\nearrow}(\lim_{\nearrow} f) \leq \lim_{\nearrow} f.$$

Deshalb brauchen wir nur zu zeigen, dass $\forall x \in \mathbb{Y}, \forall \varepsilon > 0 :$

$$\lim_{\nearrow} f(x) \leq \lim_{\nearrow}(\lim_{\nearrow} f)(x) + \varepsilon.$$

Finde $y_0 < x$ mit

$$\sup_{y < x} f(y) \leq f(y_0) + \varepsilon.$$

Finde $y_1 \in \mathbb{Y}$ so dass $y_0 < y_1 < x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\nearrow} f(x) &\leq f(y_0) + \varepsilon \\ &\leq \lim_{\nearrow} f(y_1) + \varepsilon \\ &\leq \lim_{\nearrow}(\lim_{\nearrow} f)(x) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{20}$$

5. “ \leq ”: Für beliebige $x \in \mathbb{Y}$ und $\varepsilon > 0$ existiert $y < x$, sodass

$$\lim_{\nearrow}(f + g)(x) \leq (f + g)(y) + \varepsilon.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\nearrow}(f + g)(x) &\leq f(y) + g(y) + \varepsilon \\ &\leq \lim_{\nearrow} f(x) + \lim_{\nearrow} g(x) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

Wir überlassen dem Leser die andere Richtung als Übung. □

Rechtsseitige Grenzwerte haben ähnliche Eigenschaften (Übung).

Satz 5.8. *Seien f und g monoton wachsend, dann gilt*

$$\lim_{\nearrow} f = \lim_{\nearrow} g \text{ g.d.w. } \lim_{\searrow} f = \lim_{\searrow} g.$$

Beweis. Übung. □

Insbesondere gilt

$$\lim_{\nearrow} \lim_{\searrow} f = \lim_{\nearrow} f,$$

da

$$\lim_{\searrow} \lim_{\searrow} f = \lim_{\searrow} f.$$

Definition 5.9. Ist $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, dann definieren wir für $x \in \overline{\mathbb{X}}$:

$$\lim_{\nearrow} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{Y}, y \leq x} f(y).$$

Man beachte, dass $\lim_{\nearrow} f$ hier eine Funktion von $\overline{\mathbb{X}}$ nach \mathbb{R} ist.

Satz 5.10. *Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, dann gilt $\forall x \in \overline{\mathbb{X}}$:*

$$\begin{aligned} \lim_{\nearrow} f(x) &= \lim_{\nearrow} (\lim_{\nearrow} f)(x) \\ &= \lim_{\nearrow} (\lim_{\searrow} f)(x). \end{aligned} \tag{22}$$

Beweis. Übung. □

Definition 5.11. Eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig* im Punkt $x \in \overline{\mathbb{X}}, x \neq 0$, falls

$$\lim_{\nearrow} f(x) = \lim_{\searrow} f(x).$$

f heißt *stetig* bei $x = 0$ falls

$$f(0) = \lim_{\searrow} f(0).$$

f heißt *stetig*, falls f in allen Punkten $x \in \overline{\mathbb{X}}$ stetig ist.

Satz 5.12. Ist $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ *additiv*, dann ist f *stetig*.

Beweis. Wir beweisen nur den Fall $f(1) > 0$. Stetigkeit in $x = 0$: Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen daran, dass

$$\inf_{x>0} f(x) = y > 0.$$

Wähle $\varepsilon < y$ und $x > 0$ mit $f(x) \leq y + \varepsilon$. Weiter wähle z mit $z + z = x$. Dann gilt

$$f(z) + f(z) = f(x) \leq y + \varepsilon.$$

Es folgt $f(z) < y$. Widerspruch.

Wir überlassen dem Leser den Beweis der Stetigkeit in $x \in \overline{\mathbb{X}}$ als Übung. □

◇ ————— Ende Vorlesung 14, 20.11.2014 ————— ◇

Definition 5.13. Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ eine monotone Funktion. Falls f stetig auf $\overline{\mathbb{X}}$ ist, schreiben wir

$$f : \overline{\mathbb{X}} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$$

für $\lim_{\nearrow} f = \lim_{\searrow} f : \overline{\mathbb{X}} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$.

Somit haben wir den Definitionsbereich einer stetigen monotonen Funktion von \mathbb{Y} auf $\overline{\mathbb{X}}$ erweitert.

Wenn $y \in \mathbb{Y}$ und f stetig in y ist, dann gilt

$$\lim_{\nearrow} f(y) \leq f(y) \leq \lim_{\searrow} f(y) \leq \lim_{\nearrow} f(y),$$

also sind alle Ungleichungen Gleichungen.

Für $a \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}$ haben wir bereits die Multiplikation $a \cdot x$ definiert:

$$a \cdot x = f(x),$$

wobei f die eindeutige additive Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ mit $f(1) = a$ ist. Da diese Funktion f stetig ist, erweitern wir f zu $f : \overline{\mathbb{X}} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ und definieren dadurch $a \cdot x$ für alle $a \in \mathbb{X}$ und $x \in \overline{\mathbb{X}}$.

Satz 5.14. Für alle $a, x, y \in \overline{\mathbb{X}}$ gilt

$$a \cdot (x + y) = ax + ay.$$

Beweis. $f : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ ist die eindeutige additive Funktion mit $f(1) = a$. Zu zeigen:

$$\lim_{\nearrow} f(x + y) = \lim_{\nearrow} f(x) + \lim_{\nearrow} f(y). \quad (23)$$

Die linke Seite nennen wir I und die rechte Seite II. Man beobachte, dass

$$\text{I} = \sup_{z < x+y, z \in \mathbb{Y}} f(z) = \sup_{z_1 < x, z_2 < y, z_1, z_2 \in \mathbb{Y}} f(z_1 + z_2),$$

wobei die zweite Gleichung aus der Definition von “+” folgt. Da f additiv ist, gilt außerdem

$$\text{I} = \sup_{z_1 < x, z_2 < y, z_1, z_2 \in \mathbb{Y}} (f(z_1) + f(z_2)).$$

Für den Term II haben wir

$$\text{II} = \sup_{z_1 < x, z_1 \in \mathbb{Y}} f(z_1) + \sup_{z_2 < y, z_2 \in \mathbb{Y}} f(z_2).$$

Zu zeigen ist, dass

$$\sup_{z_1 < x, z_2 < y, z_1, z_2 \in \mathbb{Y}} (f(z_1) + f(z_2)) = \sup_{z_1 < x, z_1 \in \mathbb{Y}} f(z_1) + \sup_{z_2 < y, z_2 \in \mathbb{Y}} f(z_2). \quad (24)$$

“ \leq ”: Für alle $z_1 < x, z_2 < y$ gilt

$$f(z_1) + f(z_2) \leq \sup_{z'_1 < x, z'_1 \in \mathbb{Y}} f(z'_1) + \sup_{z'_2 < y, z'_2 \in \mathbb{Y}} f(z'_2).$$

Dann folgt “ \leq ” in (24) nach der Definition von sup.

“ \geq ”: Sei $z_1 < x$ mit

$$\sup_{z'_1 < x, z'_1 \in \mathbb{Y}} f(z'_1) < f(z_1) + \varepsilon,$$

und $z_2 < y$ mit

$$\sup_{z'_2 < y, z'_2 \in \mathbb{Y}} f(z'_2) < f(z_2) + \varepsilon.$$

Addition beider Ungleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} & \sup_{z'_1 < x, z'_1 \in \mathbb{Y}} f(z'_1) + \sup_{z'_2 < y, z'_2 \in \mathbb{Y}} f(z'_2) \\ & \leq f(z_1) + f(z_2) + 2\varepsilon \\ & \leq \sup_{z_1 < x, z_2 < y} (f(z_1) + f(z_2)) + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{25}$$

□

Satz 5.15 (Zwischenwertsatz). Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ monoton wachsend und stetig, sowie $x_1, x_2 \in \mathbb{Y}$, $y \in \overline{\mathbb{X}}$ mit

$$f(x_1) < y < f(x_2).$$

Dann $\exists x_0 \in \overline{\mathbb{X}}$ mit $x_1 < x_0 < x_2$, sodass $f(x_0) = y$.

Beweis. Sei $M := \{x \in \mathbb{Y} : f(x) < y\}$. Zuerst beobachte man, dass M nicht leer ist, da $x_1 \in M$. M ist auch nach oben hin beschränkt:

$$x \in M, f(x) < y < f(x_2) \Rightarrow x \leq x_2.$$

Setze $x_0 = \sup(M)$. Dann gilt $x_1 < x_0 \leq x_2$. Zu zeigen ist, dass

$$f(x_0) = y.$$

Nach Definition von M haben wir $\forall x > x_0, f(x) \geq y$. Deshalb gilt

$$\lim_{\searrow} f(x_0) \geq y. \tag{26}$$

Wir haben auch

$$\lim_{\nearrow} f(x_0) \leq y, \tag{27}$$

da $\forall x < x_0, \exists x' < x' < x_0$ mit $x' \in M$, also $f(x) \leq f(x') \leq y$. Aus (26) und (27) folgt

$$\lim_{\nearrow} f(x_0) = \lim_{\searrow} f(x_0) = y,$$

also $f(x_0) = y$. □

Bemerkung. Ist f streng monoton, so ist das x_0 im Zwischenwertsatz eindeutig.

Korollar 5.16. Für alle $x \in \overline{\mathbb{X}}$, $x \neq 0$, gibt es $y_0 \in \overline{\mathbb{X}}$ mit $x \cdot y_0 = 1$.

Beweis. Wir möchten den Zwischenwertsatz für die Funktion $f(y) = x \cdot y$ anwenden, deshalb müssen wir ein Intervall $[a, b]$ finden, sodass $x \cdot a < 1$ und $x \cdot b > 1$. Setze $a = 0$, dann ist $x \cdot 0 = 0 < 1$.

Behauptung: $\exists b : x \cdot b \geq 2$. Beweis durch Widerspruch: Wir annehmen an, dass $\sup_b x \cdot b < 2$. Nach Definition von \sup gibt es ein b' , sodass

$$x \cdot b' + x > \sup_b x \cdot b,$$

also $x(b' + 1) > \sup_b x \cdot b$. Widerspruch. □

Eng verwandt mit dem Zwischenwertsatz ist der folgende Satz:

Satz 5.17 (Umkehrfunktion). Sei $f : \overline{\mathbb{X}} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ streng monoton wachsend und stetig, $f(0) = 0$, $\sup_{y \in \mathbb{Y}} f(y) = \infty$. Dann $\exists g : \overline{\mathbb{X}} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ streng monoton wachsend und stetig mit

$$f(g(x)) = x, g(f(x)) = x.$$

Den Beweis überlassen wir als Übung.

Der folgende bemerkenswerte Satz besagt, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ an den meisten Stellen $x \in \overline{\mathbb{X}}$ stetig ist

Satz 5.18. Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ monoton wachsend, dann gibt es höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen in $\overline{\mathbb{X}}$, oder äquivalent: es gibt eine surjektive Funktion

$$g : \mathbb{N} \rightarrow M, M := \{0 < x < \infty : \lim_{\nearrow} f(x) < \lim_{\searrow} f(x)\}.$$

Beweis. Abzählbare Vereinigungen von abzählbaren Mengen sind abzählbar. Daher genügt es zu zeigen, dass es für alle $N \in \mathbb{N}$ eine surjektive Abbildung

$$g_N : \mathbb{N} \rightarrow M_N, M_N := \{x : 0 < x, f(x) < N, \lim_{\nearrow} f(x) < \lim_{\searrow} f(x)\} \text{ gibt.}$$

Die Vereinigung all dieser Menge M_N ist die Menge aller Unstetigkeitsstellen für die der rechtsseitige Grenzwert ungleich ∞ ist. Es gibt aber wegen Monotonizität höchstens eine Unstetigkeitsstelle, für die der rechtsseitige Grenzwert gleich ∞ ist.

Weiter genügt es zu zeigen, dass es für alle $N \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ eine Surjektion

$g_{N,k} : \mathbb{N} \rightarrow M_{N,k}$, $M_{N,k} := \{x : 0 < x, f(x) < N, \lim_{\nearrow} f(x) + \frac{1}{2^k} < \lim_{\searrow} f(x)\}$ gibt.

Die Vereinigung dieser Mengen für festes N ist nämlich gerade M_N .

Wir beweisen, dass $M_{N,k}$ endlich ist.

Wähle n_0 , sodass

$$\frac{n_0}{2^{k+2}} \geq f(N).$$

Für $0 \leq n \leq n_0$ setze

$$x_n = \sup\{x : f(x) \leq \frac{n}{2^{k+2}}\}.$$

Es reicht zu zeigen, dass

$$M_{N,k} \subset \{x_n : 0 \leq n \leq n_0\}.$$

Sei $x \in M_{N,k}$. Dann gilt

$$\lim_{\nearrow} f(x) + \frac{1}{2^k} < \lim_{\searrow} f(x).$$

Wähle n minimal mit

$$\lim_{\nearrow} f(x) \leq \frac{n+1}{2^{k+2}},$$

also

$$\frac{n}{2^{k+2}} \leq \lim_{\nearrow} f(x).$$

Dann ist

$$\frac{n+1}{2^{k+2}} \leq \lim_{\nearrow} f(x) + \frac{2}{2^{k+2}} < \lim_{\searrow} f(x).$$

Für alle $x' < x$, gilt

$$f(x') \leq \frac{n+1}{2^{k+2}}.$$

Desweiteren gilt für alle $x' > x$,

$$f(x') \geq \frac{n+2}{2^{k+2}}.$$

Aus den zwei letzten Abschätzungen folgt $x = x_{n+1}$. □

Korollar 5.19. Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{X}}$ monoton wachsend, $0 \leq A < B$ mit $f(B) < \infty$. Sei

$$M_k = \{x : A < x < B, \lim_{\nearrow} f(x) + \frac{1}{2^k} \leq \lim_{\searrow} f(x)\}.$$

Für $x \in M_k$, sei $h(x)$ so gewählt, dass

$$\lim_{\nearrow} f(x) + h(x) = \lim_{\searrow} f(x). \quad (28)$$

Dann gilt

$$f(A) + \sum_{x \in M_k} h(x) \leq f(B). \quad (29)$$

Beweis. Da die Menge M_k endlich ist, können wir $N \in \mathbb{N}$ und $g : I_{N+1} \rightarrow M_k$ finden, sodass g monoton wachsend ist. Das heißt, $g(0)$ ist das kleinste Element in M_k , $g(1)$ ist das kleinste Element in $M_k \setminus \{g(0)\}$ und so weiter. Es ist einfach zu sehen, dass

$$\begin{aligned} f(A) + \sum_{n=0}^N \lim_{\searrow} f(g(n)) &\leq f(A) + \sum_{n=0}^{N-1} \lim_{\nearrow} f(g(n+1)) + f(B) \\ &\leq \sum_{n=0}^N \lim_{\nearrow} f(g(n)) + f(B). \end{aligned} \quad (30)$$

Nach der Definition von h erhalten wir (29). □

Korollar 5.20. Das obige Korollar gilt auch für die Menge

$$M = \{x : A < x < B, \lim_{\nearrow} f(x) < \lim_{\searrow} f(x)\}.$$

Hier benutzen wir die Schreibweise, dass

$$\sum_{x \in M} h(x) = \sup_k \sum_{x \in M_k} h(x).$$

Beweis. Übung. □

Satz 5.21. Sei f monoton wachsend mit $f(x) = \lim_{\nearrow} f(x)$, und

$$M = \{x : A < x < B, \lim_{\nearrow} f(x) < \lim_{\searrow} f(x)\}.$$

Sei h gegeben durch (28). Dann hat

$$f_p(x) := \sum_{x' \in M} h(x') \mathbf{1}_{\{x' < x\}}(x')$$

die gleichen Unstetigkeitsstellen auf dem Intervall $A < x < B$ wie f und

$$f = f_p + f_c,$$

wobei f_c monoton und stetig auf $A < x < B$ ist.

Hierbei ist $\mathbf{1}_{\{x' < x\}}(x') = \begin{cases} 1, & \text{falls } x' < x, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

◇ ————— Ende Vorlesung 15, 25.11.2014 ————— ◇

Definition 5.22. Eine Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *von beschränkter Variation*, falls sie Differenz zweier beschränkter monoton wachsender Funktionen $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ ist.

f heißt *von lokal beschränkter Variation*, falls $f = f_1 - f_2$ für monoton wachsende Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$.

Satz 5.23. Ist f von (lokal) beschränkter Variation und $f = f_1 - f_2 = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ mit $f_1, f_2, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ monoton wachsend, dann gilt

$$\lim_{\nearrow} f_1 - \lim_{\nearrow} f_2 = \lim_{\nearrow} \tilde{f}_1 - \lim_{\nearrow} \tilde{f}_2.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $f_1 + \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 + f_2$. Auf beiden Seiten steht eine monotone Funktion. Nun gilt

$$\lim_{\nearrow} f_1 + \lim_{\nearrow} \tilde{f}_2 = \lim_{\nearrow} (f_1 + \tilde{f}_2) = \lim_{\nearrow} (\tilde{f}_1 + f_2) = \lim_{\nearrow} \tilde{f}_1 + \lim_{\nearrow} f_2.$$

□

Dies zeigt, dass die folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 5.24. Sei $f = f_1 - f_2$ wie im Satz von (lokal) beschränkter Variation. Setze

$$\begin{aligned} \lim_{\nearrow} f &:= \lim_{\nearrow} f_1 - \lim_{\nearrow} f_2, \\ \lim_{\searrow} f &:= \lim_{\searrow} f_1 - \lim_{\searrow} f_2. \end{aligned}$$

Die Eigenschaften von $\lim_{\nearrow}, \lim_{\searrow}$ für Funktionen mit (lokal) beschränkter Variation sind ähnlich wie für monotone Funktionen (Übung).

Definition 5.25. Sei f von beschränkter Variation. f heißt *stetig*, falls f Differenz zweier stetiger monoton wachsender Funktionen ist.

Satz 5.26. Ist $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ monoton wachsend und $x \in \mathbb{Y}$, dann ist f genau dann stetig im Punkt x , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{Y} : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Übung. □

Der Satz gilt auch für Funktionen von (lokal) beschränkter Variation und motiviert die Definition der Stetigkeit für allgemeine Funktionen.

Definition 5.27. Sei $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, sagen wir dass f stetig im Punkt $x \in \mathbb{X}$ ist, falls

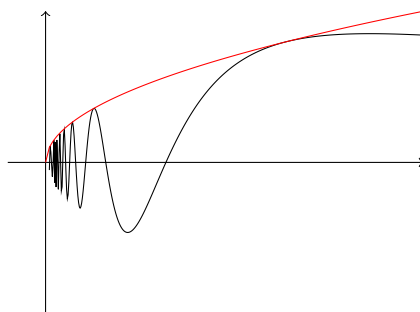
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{X} : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \quad (31)$$

Nicht alle Funktionen sind von beschränkter Variation.

Beispiel. Sei $\varepsilon > 0$. Definiere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

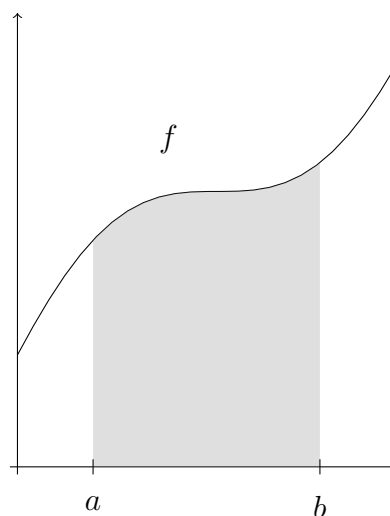
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^\varepsilon, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

f ist nicht von beschränkter Variation, aber stetig (siehe Abbildung).



6 Integration

Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ eine monoton wachsende Funktion und $a, b \in \mathbb{Y}$ mit $a < b$. Wir möchten einen Weg finden, den Flächeninhalt unter dem Graphen von f von a nach b zu definieren und zu bestimmen (in der Abbildung grau).



Dazu teilen wir das Intervall $[a, b]$ in dyadische Intervalle auf. Sei k_0 nämlich so, dass $a, b \in \mathbb{Y}_{k_0}$ und sei $k \geq k_0$, dann setze $a = \frac{n}{2^k}$, $b = \frac{n+m}{2^k}$.

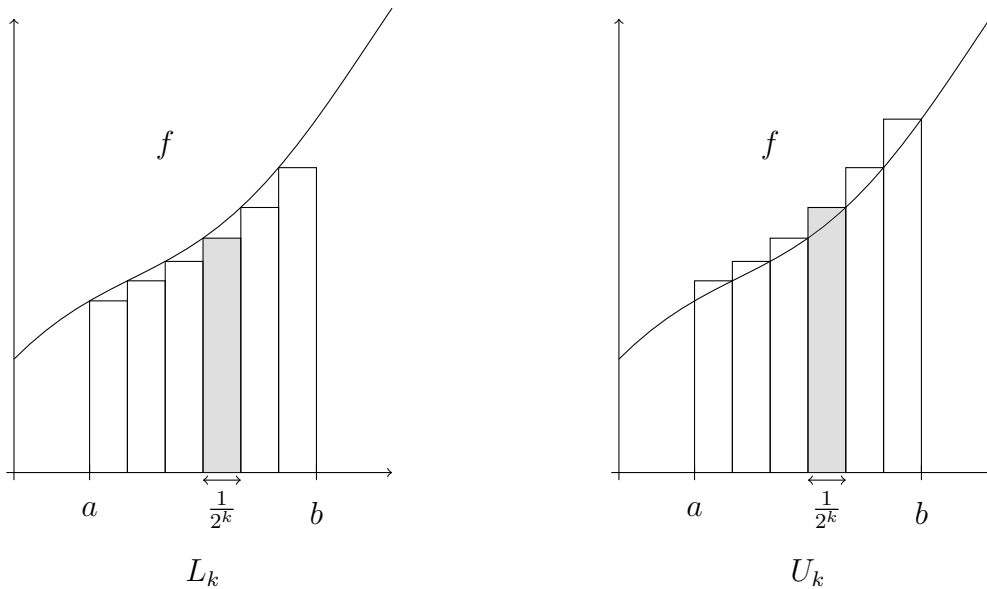
Definition 6.1. Die *untere Riemannsche Summe* zu den Daten k, f, a, b ist definiert als

$$L_k = L_k(f, a, b) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{1}{2^k} f\left(\frac{n+\ell}{2^k}\right) \text{ und}$$

die *obere Riemannsche Summe* ist definiert als

$$U_k = U_k(f, a, b) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{1}{2^k} f\left(\frac{n+\ell+1}{2^k}\right).$$

Dabei steht das L für *lower* und das U für *upper*.



Die Idee ist nun, dass für $k \rightarrow \infty$ die Ober- und Untersummen konvergieren. Falls die Grenzwerte übereinstimmen, ist der gemeinsame Grenzwert ein sinnvoller Kandidat für den zu definierenden Flächeninhalt. Da wir die Funktion f als monoton angenommen haben, ist dies tatsächlich immer der Fall.

Beobachtungen. Im Folgenden sei $k \geq k_0$.

1. $L_k \leq U_k$, denn für alle ℓ gilt $f\left(\frac{n+\ell}{2^k}\right) \leq f\left(\frac{n+\ell+1}{2^k}\right)$.
2. $L_{k+1} \geq L_k$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 L_k &= \sum_{\ell=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^k} f\left(\frac{n+\ell}{2^k}\right) = \sum_{\ell'=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^k} f\left(\frac{2n+2\ell'}{2^k}\right) + \sum_{\ell'=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^k} \underbrace{f\left(\frac{2n+2\ell'+1}{2^k}\right)}_{\geq f\left(\frac{2n+2\ell'}{2^k}\right)} \\
 &\geq \sum_{\ell'=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^k} f\left(\frac{2n+2\ell'}{2^k}\right) = L_{k+1}
 \end{aligned}$$

□

3. $U_{k+1} \leq U_k$.
4. Für alle $k, k' \geq k_0$ gilt $L_k \leq U_{k'}$.

Beweis. Sei $k'' > k, k'$. Dann gilt

$$L_k \stackrel{1.}{\leq} L_{k''} \stackrel{2.}{\leq} U_{k''} \stackrel{3.}{\leq} L_{k'}.$$

□

5. $\sup_{k>k_0} L_k \leq \inf_{k'>k_0} U_{k'}$ (folgt aus der vorigen Beobachtung).

6. $L_k + \frac{1}{2^k} f(b) = U_k + \frac{1}{2^k} f(a)$, denn beide Seiten sind gleich $\sum_{\ell=0}^m \frac{1}{2^k} f\left(\frac{n+\ell}{2^k}\right)$.

Wegen Eigenschaft 5 müssen wir nur noch

$$\sup_{k>k_0} L_k \geq \inf_{k>k_0} U_k$$

zeigen, um zu sehen, dass die Grenzwerte von Ober- und Untersummen übereinstimmen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Eigenschaft 6 gilt $U_k - L_k = \frac{1}{2^k} \cdot (f(b) - f(a))$. Wähle $k > k_0$ groß genug, sodass

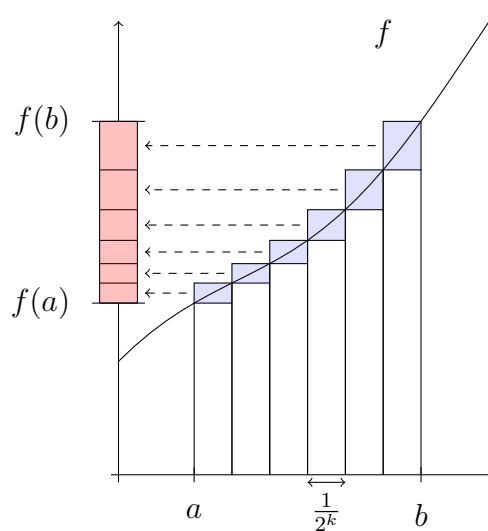
$$U_k - L_k = \frac{1}{2^k} \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Dies ist möglich wegen der Stetigkeit des Produktes. Also gilt $\varepsilon + L_k > U_k$. Durch Grenzwertbildung auf beiden Seiten erhalten wir

$$\varepsilon + \sup_{k>k_0} L_k > \inf_{k>k_0} U_k.$$

Da ε beliebig war, folgt $\sup_{k>k_0} L_k \geq \inf_{k>k_0} U_k$. Wegen der Monotonie von L_k, U_k hängt der Grenzwert $\sup_{k>k_0} L_k = \inf_{k>k_0} U_k$ nicht von der Wahl von k_0 ab.

Zu Eigenschaft 6 gibt es auch einen einleuchtenden grafischen Beweis.



Die blau beschatteten Rechtecke stellen genau die Differenz $U_k - L_k$ zwischen Ober- und Untersumme dar. Auf die y -Achse projiziert ergeben sich die rot beschatteten Rechtecke, deren Fläche $\frac{1}{2^k} \cdot (f(b) - f(a))$ beträgt. Diese Eigenschaft beruht maßgeblich auf der Monotonie von f . Entsprechend lassen sich dann natürlich auch Funktionen von beschränkter Variation integrieren. Dieser Integralbegriff, der durch die Einschränkung auf monotone Funktionen etwas spezieller ist als der von Riemann, geht auf Newton zurück.

Definition 6.2. Für f, a, b wie oben definieren wir das *Riemannsche bzw. Newtonsche Integral von a nach b von f* als

$$\int_a^b f(t)dt := I(f, a, b) := \sup_{k > k_0} L_k(f, a, b) = \inf_{k > k_0} U_k.$$

Man lasse sich von der mysteriös erscheinenden Notation $\int_a^b f(t)dt$ nicht verwirren. Die verwendete Symbolik hat sich historisch herausgebildet und sich im weiteren Verlauf der Geschichte bewährt. Das Symbol \int ist als ein stilisiertes Summenzeichen \sum zu verstehen und das dt einerseits als eine Erinnerung an die Breite der Rechtecke in der Riemannschen Summe $\frac{1}{2^k}$ und andererseits die Festlegung der Hilfsvariablen t . Die Variable t hat eine ähnliche Funktion wie der Summationsindex in einer Summe. Ihr Gültigkeitsbereich beschränkt sich auf den Integranden.

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} f\left(\frac{n+\ell}{2^k}\right) \frac{1}{2^k} \quad \underset{k \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} \quad \int_a^b f(t)dt$$

Satz 6.3. Seien $f, g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ monoton wachsende Funktionen und $a, b, c \in \mathbb{Y}$ mit $a < b$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

$$1. \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = \int_a^b (f+g)(t)dt, \text{ (Additivität)}$$

$$2. f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt, \text{ (Monotonie)}$$

$$3. a < b < c \Rightarrow \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt,$$

$$4. \text{ falls } g(x) = f(x+c) \text{ für alle } x \in \mathbb{Y}, \text{ gilt } \int_{a+c}^{b+c} f(t)dt = \int_a^b g(t)dt,$$

$$5. \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \lim_{\nearrow} f(t) dt = \int_a^b \lim_{\searrow} f(t) dt,$$

$$6. \text{ falls } f(x) = c \text{ konstant ist f\u00fcr alle } x \in \mathbb{Y}, \text{ dann ist } \int_a^b f(t) dt = (b-a)c.$$

Beweis. 1. Es gilt $L_k(f, a, b) + L_k(g, a, b) = L_k(f + g, a, b)$. Durch Bilden von sup auf beiden Seiten und wegen Monotonie der L_k folgt

$$\sup_{k > k_0} L_k(f, a, b) + \sup_{k > k_0} L_k(g, a, b) = \sup_{k > k_0} (L_k(f, a, b) + L_k(g, a, b)) = \sup_{k > k_0} L_k(f + g, a, b).$$

$$2. \text{ Es gilt } L_k(f) \leq L_k(g).$$

$$3. L_k(f, a, b) + L_k(f, b, c) = L_k(f, a, c).$$

$$4. L_k(f, a + c, b + c) = L_k(g, a, b).$$

5. Zun\u00e4chst gilt $L_k(f) \leq L_k(\lim_{\searrow} f)$, da $f \leq \lim_{\searrow} f$. Weiter gilt $L_k(\lim_{\searrow} f) \leq U_k(f)$, weil $f(\frac{n+\ell+1}{2^k}) \geq \lim_{\searrow} f(\frac{n+\ell}{2^k})$. Durch Grenzwertbildung folgt

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b \lim_{\searrow} f(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt.$$

Die Gleichung mit $\lim_{\nearrow} f$ folgt \u00e4hnlich.

6.

$$L_k(f, a, b) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{1}{2^k} \cdot c = \frac{m}{2^k} \cdot c = (b-a)c.$$

□

Definition 6.4. Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ monoton wachsend. Die *Stammfunktion* $F : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ ist definiert durch $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Definition 6.5. Eine Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ hei\u00dft *konvex*, falls f\u00fcr alle $a, b, c \in \mathbb{Y}$ mit $c + c = a + b$ gilt

$$f(c) + f(c) \leq f(a) + f(b).$$

Eigenschaften der Stammfunktion.

$$0. F \geq 0.$$

1. F ist monoton wachsend:

$$F(x+y) = \int_0^x f(t)dt + \underbrace{\int_x^{x+y} f(t)dt}_{\geq 0} \geq \int_0^x f(t)dt = F(x).$$

2. F ist stetig.

3. F ist konvex.

◇ ————— Ende Vorlesung 16, 27.11.2014 ————— ◇

Beweis der Konvexität von F . Nach Definition:

$$F(x+y) = F(x) + \int_x^{x+y} f(t)dt.$$

Da f monoton wachsend ist, ist die rechte Seite des letzten Ausdrucks beschränkt durch

$$F(x) + \int_x^{x+y} f(x+y)dt \leq F(x) + yf(x+y).$$

Ähnlich gilt auch

$$\begin{aligned} F(x+y+y) &= F(x+y) + \int_{x+y}^{x+y+y} f(t)dt \\ &\geq F(x+y) + \int_{x+y}^{x+y+y} f(x+y)dt \\ &\geq F(x+y) + yf(x+y). \end{aligned} \tag{32}$$

Wir haben zwei Ungleichungen erhalten:

$$F(x+y) \leq F(x) + yf(x+y)$$

und

$$F(x+y) + yf(x+y) \leq F(x+y+y).$$

Addition dieser zwei Ungleichungen und Auslöschung von $yf(x+y)$ liefert die Konvexität von F . □

Die obige Definition der Konvexität vergleicht die Werte von f in den Punkten a, b, c , wobei c der Mittelpunkt von a und b ist. Es gibt auch einige äquivalente Definitionen, die in dem folgenden Satz organisiert sind.

Satz 6.6. Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- 1) $\forall a, b, c \in \mathbb{Y} : c + c = a + b \Rightarrow f(c) + f(c) \leq f(a) + f(b)$;
- 2) $\forall n, k \in \mathbb{N} : f(\frac{n+1}{2^k}) + f(\frac{n+1}{2^k}) \leq f(\frac{n}{2^k}) + f(\frac{n+2}{2^k})$;
- 3) $\forall n, n, k \in \mathbb{N} : (m+1)f(\frac{n+m}{2^k}) \leq f(\frac{n}{2^k}) + mf(\frac{n+m+1}{2^k})$;
- 4) $\forall n, m, l, k \in \mathbb{N} : (m+l)f(\frac{n+m}{2^k}) \leq lf(\frac{n}{2^k}) + mf(\frac{n+m+l}{2^k})$.

Beweis. Wir werden zeigen, dass

$$4) \Rightarrow 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4).$$

- 4) \Rightarrow 1). Es seien a, b, c gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a \leq c \leq b$. Dann können wir $k, n, m \in \mathbb{N}$ finden, sodass

$$a = \frac{n}{2^k}, b = \frac{n+m+m}{2^k}.$$

Anwendung von 4) mit $l = m$ impliziert 1).

- 1) \Rightarrow 2). Sind $n, k \in \mathbb{N}$ gegeben. Um 2) zu zeigen, setzen wir

$$a = \frac{n}{2^k}, b = \frac{n+2}{2^k}, c = \frac{n+1}{2^k}.$$

- 2) \Rightarrow 3). Hier betrachten wir nur den Fall $k = 0$, der Fall $k > 0$ ist ähnlich. Wir verwenden Induktion nach m . Der Fall $m = 0$ ist trivial. Der Fall $m = 1$ ist genau 2).

Induktionsannahme:

$$(m+1)f(n+m) \leq f(n) + mf(n+m+1). \quad (33)$$

Zu zeigen ist

$$(m+2)f(n+m+1) \leq f(n) + (m+1)f(n+m+2). \quad (34)$$

Nach 2) erhalten wir

$$2f(n+m) \leq f(n+m) + f(n+m+2). \quad (35)$$

(33) + (m+1)(35) impliziert

$$2(m+1)f(n+m+1) \leq f(n) + mf(n+m+1) + (m+1)f(n+m+2).$$

Es folgt (34) nach Auslöschung von $mf(n+m+1)$.

2) \Rightarrow 3). Wir betrachten wieder nur den Fall $k = 0$. Induktion nach l : der Fall $l = 0$ ist trivial. Der Fall $l = 1$ ist genau 3).

Induktionsannahme:

$$(m + l)f(n + m) \leq lf(n) + mf(n + m + l). \quad (36)$$

Nach 3) erhalten wir

$$(l + 1)f(n + m + l) \leq f(n + m) + lf(n + m + l + 1). \quad (37)$$

Dann impliziert $(l + 1)(36) + m(37)$ die Ungleichung in 4). □

Nach dem obigen Satz ist eine Funktion $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ also konvex, wenn sie eine der Eigenschaften 1) – 4) erfüllt.

Satz 6.7. *Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ konvex und monoton wachsend. Dann ist f stetig.*

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{X}$ ist zu zeigen, dass f stetig in x ist. Wir überlassen dem Leser den Fall $x = 0$ als Übung. Für $x \neq 0$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$x + 3 < N.$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\frac{2f(N)}{2^k} < \varepsilon.$$

Wähle n so, dass die beiden ersten Ungleichung in der folgenden Kette erfüllt sind, die beiden letzten folgen dann einfach:

$$\frac{n}{2^k} < x < \frac{n + 2}{2^k} < \frac{n + 2 + 2^k}{2^k} < N.$$

Nach Eigenschaft 4) aus Satz 6.6 erhalten wir

$$(2^k + 2)f\left(\frac{n + 2}{2^k}\right) \leq 2^k f\left(\frac{n}{2^k}\right) + 2f\left(\frac{n + 2 + 2^k}{2^k}\right).$$

Nach Monotonie der Funktion f folgt

$$2^k f\left(\frac{n + 2}{2^k}\right) \leq 2^k f\left(\frac{n}{2^k}\right) + 2f(N).$$

Daraus folgt

$$f\left(\frac{n + 2}{2^k}\right) \leq f\left(\frac{n}{2^k}\right) + \varepsilon,$$

also

$$\lim_{\searrow} f(x) \leq \lim_{\nearrow} f(x) + \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, erhalten wir $\lim_{\searrow} f(x) \leq \lim_{\nearrow} f(x)$. □

7 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung, und Ableitungen

Definition 7.1. Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow X$ eine monoton wachsende Funktion, dann heißt f *rechts-stetig*, falls

$$\forall y \in \mathbb{Y} : f(y) = \lim_{\downarrow} f(y).$$

Satz 7.2 (Hauptsatz, Teil 1). Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ monoton wachsend und rechts-stetig. Sei $F : \mathbb{Y} \rightarrow X$ gegeben durch

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Dann ist F monoton wachsend, konvex, $F(0) = 0$ und

$$\forall y \in \mathbb{Y} : f(y) = \sup\{a : a \in \mathbb{Y} \wedge \forall x \in \mathbb{Y}, F(y) + ax \leq F(y + x)\}.$$

Beweis. $F(0) = 0$ ist nach Definition. Konvexität von F ist schon bewiesen. Monotonie von F folgt aus

$$F(y + x) = F(y) + \int_y^{y+x} f(t) dt \geq F(y).$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$f(y) \leq \sup(A), f(y) \geq \sup(A),$$

wobei

$$A = \{a \in \mathbb{Y} : \forall x \in \mathbb{X} : F(y) + ax \leq F(y + x)\}.$$

Ungleichung “ \leq ”: Aus der Monotonie von f folgt

$$F(y) + f(y)x = F(y) + \int_y^{y+x} f(y) dt \leq F(y) + \int_y^{y+x} f(t) dt = F(y + x).$$

Dies impliziert $z \in A$ für alle $z \in \mathbb{Y}$ mit $z \leq f(y)$, daher $f(y) \leq \sup(A)$.

Ungleichung “ \geq ”: Wähle $m \in \mathbb{Y}$ mit $m > f(y)$. Zu zeigen ist, dass

$$\exists x > 0 : F(y + x) < F(y) + mx.$$

Wähle $f(y) < \tilde{m} < m$. Da f rechtsstetig ist, können wir $x > 0$ finden, sodass

$$f(y + x) \leq \tilde{m}.$$

Wähle ein solches x . Dann erhalten wir

$$F(y + x) = F(y) + \int_y^{y+x} f(t) dt \leq F(y) + \tilde{m}x < F(y) + mx.$$

□

Wir haben folgenden leichten Hilfssatz:

Lemma 7.3. *Sei $F : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ monoton wachsend, konvex. Für $y \in \mathbb{Y}$, setze*

$$f(y) = \sup\{a \in \mathbb{Y} : \forall x \in Y : F(y) + ax \leq F(y + x)\}.$$

Dann ist

$$\forall x \in Y : F(y) + f(y)x \leq F(y + x).$$

Beweis: Übung.

Satz 7.4 (Hauptsatz, Teil 2). *Sei $F : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ monoton wachsend, konvex und $F(0) = 0$. Für $y \in \mathbb{Y}$, setze*

$$f(y) = \sup\{a \in \mathbb{Y} : \forall x \in Y : F(y) + ax \leq F(y + x)\}.$$

Dann ist $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ monoton wachsend, rechts-stetig, und es gilt

$$\forall x \in \mathbb{Y} : \int_0^x f(t)dt = F(x). \quad (38)$$

Beweis. f ist monoton wachsend: Sei $y < y' \in \mathbb{Y}$. Zu zeigen ist, dass

$$\forall x \in \mathbb{Y} : F(y') + f(y)x \leq F(y' + x). \quad (39)$$

Wir setzen $y' = y + x'$. Nach dem obigen Hilfssatz folgt

$$F(y) + f(y)x' \leq F(y + x'). \quad (40)$$

Nach Konvexität von F folgt

$$(x + x')F(y + x') \leq xF(y) + x'F(y + x' + x). \quad (41)$$

(41)+ $x \cdot$ (40) impliziert (39).

f ist rechts-stetig: Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass

$$\exists y : \lim_{\searrow} f(y) > f(y).$$

Wähle $\varepsilon > 0$, sodass

$$\lim_{\searrow} f(y) > f(y) + \varepsilon + \varepsilon. \quad (42)$$

Sei $x > 0$ und setze $x = x' + x'$. Dann gilt wieder mit dem Hilfssatz

$$F(y + x) = F(y + x' + x') \geq F(y + x') + f(y + x')x'. \quad (43)$$

Nach (42) und Monotonie von f gilt weiter

$$F(y + x) \geq F(y) + f(y)x' + (f(y) + \varepsilon + \varepsilon)x' = F(y) + (f(y) + \varepsilon)x. \quad (44)$$

Dies ist ein Widerspruch zur Definition von f .

Wir müssen noch die Gleichung (38) zeigen: Sei k groß genug so dass $x \in \mathbb{Y}_k$ und $x = \frac{n}{2^k}$. Zu zeigen ist, dass

$$L_k(f, 0, x) \leq F(x) \leq U_k(f, 0, x). \quad (45)$$

Für die Untersumme gilt nach Definition

$$L_k(f, 0, x) = \sum_0^{n-1} \frac{1}{2^k} f\left(\frac{l}{2^k}\right). \quad (46)$$

Nach Monotonie von f gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} f\left(\frac{l}{2^k}\right) + \sum_{l=0}^{n-1} F\left(\frac{l}{2^k}\right) \\ & \leq \sum_{l=0}^{n-1} F\left(\frac{l+1}{2^k}\right) = \sum_{l=0}^{n-1} F\left(\frac{l}{2^k}\right) + F\left(\frac{n}{2^k}\right). \end{aligned} \quad (47)$$

Daraus folgt $L_k(f, 0, x) \leq F(x)$.

Zur Obersumme: zuerst beweisen wir eine

Zwischenbehauptung: für alle x und y gilt

$$F(y+x) \leq F(y) + f(y+x)x. \quad (48)$$

Beweis der Behauptung. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle x' so, dass

$$F(y+x+x') \leq F(y+x) + (\varepsilon + f(y+x))x'. \quad (49)$$

Nach Konvexität von F gilt

$$(x+x')F(y+x) \leq x'F(y) + xF(y+x+x'). \quad (50)$$

$x \cdot (49) + (50)$ impliziert

$$F(y+x) \leq x(\varepsilon + f(y+x)) + F(y). \quad (51)$$

Da ε beliebig war, folgt (48).

Zurück zur Obersumme: Nach der obigen Behauptung gilt

$$\sum_{l=1}^n \frac{1}{2^k} f\left(\frac{l}{2^k}\right) + \sum_{l=0}^{n-1} F\left(\frac{l}{2^k}\right) \geq \sum_{l=1}^n F\left(\frac{l}{2^k}\right) = \sum_{l=0}^{n-1} F\left(\frac{l}{2^k}\right) + F\left(\frac{n}{2^k}\right).$$

Daraus folgt

$$U_k(f, 0, k) \geq F(x).$$

□

Wir fassen die zwei Teile des Hauptsatzes zusammen. Sei M_r die Menge der monoton wachsenden rechts-stetigen Funktionen $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$. Sei C_0 die Menge der monoton wachsenden konvexen Funktionen $F : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ mit $F(0) = 0$.

Dann ist

$$\mathcal{I} : M_r \rightarrow C_0, \mathcal{I}(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

eine Bijektion mit Umkehrfunktion

$$\mathcal{D}_r : C_0 \rightarrow M_r, \mathcal{D}_r(F)(x) = \sup\{a \in \mathbb{Y} : \forall y \in Y : F(x) + ay \leq F(x + y)\}$$

Wir schreiben F' für $\mathcal{D}_r(F)$ und nennen F' die rechts-seitige Ableitung. Der folgende Satz beschreibt links-seitige Ableitungen. Wir schreiben M_l für die Menge der monoton wachsenden links-stetigen Funktionen $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ mit $f(0) = 0$.

Satz 7.5. *Die Abbildung*

$$\mathcal{I} : M_l \rightarrow C_0, \mathcal{I}(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung

$$\mathcal{D}_l : C_0 \rightarrow M_l, \mathcal{D}_l(F) = \lim_{\nearrow} (F')$$

wobei wir $\lim_{\nearrow} f$ im Nullpunkt so definieren dass $\lim_{\nearrow} f(0) = 0$.

Beweis. Wir beachten daß die Abbildung \mathcal{I} auf allen monoton wachsenden Funktionen definiert ist, der Satz aber über die Einschränkung dieser Funktion auf M_l geht.

Wir zeigen zuerst Surjektivität. Sei $F \in C_0$. Dann ist nach dem Hauptsatz $F = \mathcal{I}(F')$ und nach einem früheren Satz auch $F = \mathcal{I}(\lim_{\nearrow} F')$. Da $\lim_{\nearrow} F'$ links-stetig ist, folgt Surjektivität auf C_0 der Einschränkung von \mathcal{I} auf M_l .

Wir zeigen nun Injektivität. Sei $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(g)$ für zwei links-stetige Funktionen f und g . Dann gilt auch

$$\mathcal{I}(\lim_{\searrow} f) = \mathcal{I}(\lim_{\searrow} g).$$

Nach dem Hauptsatz gilt $\lim_{\searrow} f = \lim_{\searrow} g$. Nach einem früheren Satz gilt

$$f = \lim_{\nearrow} \lim_{\searrow} f = \lim_{\nearrow} \lim_{\searrow} g = g.$$

Also $f = g$, was zu zeigen war.
 Es gilt schließlich mit dem Hauptsatz

$$\mathcal{I}(\lim_{\nearrow}(F')) = \mathcal{I}(F') = F.$$

und daher ist \mathcal{D}_l die Umkehrabbildung von der Einschränkung von \mathcal{I} auf M_l . □

Sei nun C die Menge der monoton wachsenden konvexen Funktionen $F : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$. Wir können die Definition der rechts-seitigen Ableitung auf C erweitern:

$$F'(x) = \sup\{a \in \mathbb{Y} : \forall y \in Y : F(x) + ay \leq F(x + y)\}$$

Satz 7.6. *Ist eine Funktion F in C , so gibt es genau eine Funktion $G \in C_0$ mit*

$$F = G + F(0)$$

und wir haben $F' = G'$. Insbesondere

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(x) dx$$

Der Beweis wird als Übung überlassen.

Der folgende Satz besagt, dass die rechtsseitige Ableitung einer Funktion in C in einem Punkt x nur von den Werten der Funktion in der Nähe von x abhängt.

Satz 7.7. *Sei $F \in C$ und $x \in \mathbb{Y}$. Sei ein $m \in \mathbb{Y}$ und $y \in \mathbb{Y}$ mit*

$$F(x) + my > F(x + y) .$$

Dann gilt

$$\forall 0 < y' < y : F(x) + my' > F(x + y').$$

Beweis. Wähle y'' sodass $y' + y'' = y$. Wegen Konvexität haben wir

$$\begin{aligned} (y' + y'')F(x + y') &\leq y''F(x) + y'F(x + y' + y'') \\ &< y''F(x) + y'F(x) + y'm(y' + y'') \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$F(x + y') < F(x) + y'm.$$

□

Eine Umformulierung dieses Satzes und des Hilfssatzes 7.3 ergibt für $F \in C$ und $x \in \mathbb{Y}$ die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h < \delta : F(x) + F'(x)h \leq F(x+h) < F(x) + (F'(x) + \varepsilon)h$$

Aus

$$F(x) + F'(x)h \leq F(x+h) < F(x) + (F'(x) + \varepsilon)h$$

folgt der Reihe nach

$$F'(x)h \leq F(x+h) - F(x) < (F'(x) + \varepsilon)h$$

$$F'(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < F'(x) + \varepsilon$$

$$0 \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - F'(x) < \varepsilon$$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - F'(x) \right| < \varepsilon$$

Definition 7.8. Sei $F \in C$. Wir sagen dass F stetig differenzierbar ist, wenn F' stetig ist.

Satz 7.9. Ist $F \in C$ stetig differenzierbar, so gilt für alle $x \in \mathbb{Y}$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \neq x, |y-x| > \delta : \left| \frac{F(y) - F(x)}{y-x} - F'(x) \right| < \varepsilon$$

Der Beweis ist eine Übung.

8 Erste Ableitungsregeln, Produktregel

Wir tragen einige Funktionen zusammen, deren Ableitungen bekannt sind. Ist $f = c$ eine konstante Funktion, so gilt $f' = 0$, denn offenbar besteht die Menge

$$\{a \in \mathbb{Y} : \forall y \in \mathbb{Y} : c + ay \leq c\}$$

nur aus der Zahl 0.

Ist f eine lineare Funktion, das heisst $f(x) = cx$ für alle x mit $c \in \mathbb{X}$, so gilt $f' = c$ da offenbar

$$\{a \in \mathbb{Y} : \forall y \in \mathbb{Y} : cx + ay \leq c(x+y)\}$$

alle Zahlen $a \in \mathbb{Y}$ enthält mit $a \leq c$. Es ist nämlich für $y > 0$

$$cx + ay \leq c(x+y)$$

gleichwertig mit

$$ay \leq cy$$

was wiederum gleichwertig mit $a \leq c$ ist.

Satz 8.1 (Summenregel). *Sind f, g konvex und monoton wachsend, so ist $f + g$ monoton wachsend und es gilt*

$$(f + g)' = f' + g'$$

Der Beweis ist als Übung überlassen.

Mit diesem Satz können wir nun auch affin linear Funktionen, d.-h. solche von der Form $c_1x + c_2$ ableiten.

Man beachte dass $f \leq g$ mit $f, g \in M$ zwar

$$\int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x g(t) dt$$

impliziert, nicht aber $f' \leq g'$ selbst wenn $f, g \in C$.

Wir kommen nun zur Produktregel.

Satz 8.2 (Produktregel). *Sind $f, g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ monoton wachsend und konvex, so ist auch fg monoton wachsend und konvex und es gilt*

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Beweis. Wir zeigen zuerst Monotonizität von fg . Sei $x < y$, dann gilt mit zweimaliger Anwendung der Monotonizität linearer Funktionen:

$$f(x)g(x) \leq f(x)g(y) \leq f(y)g(y).$$

Nun zeigen wir Konvexität. Sei $2c = a + b$. Dann gilt wieder mit Monotonizität linearer Funktionen

$$\begin{aligned} 4f(c)g(c) &\leq (f(a) + f(b))(g(a) + g(b)) \\ &= f(a)g(a) + f(a)g(b) + f(b)g(a) + f(b)g(b) \end{aligned}$$

Setze nun $f(b) = f(a) + d$. Dann können wir den letzten Ausdruck abschätzen durch

$$\begin{aligned} &\leq f(a)g(a) + f(a)g(b) + f(a)g(a) + dg(a) + f(b)g(b) \\ &\leq f(a)g(a) + f(a)g(b) + f(a)g(a) + dg(b) + f(b)g(b) \\ &\leq f(a)g(a) + f(b)g(b) + f(a)g(a) + f(b)g(b) \\ &\leq 2f(a)g(a) + 2f(b)g(b) \end{aligned}$$

Dies impliziert Konvexität von fg .

Bleibt zu zeigen dass $(fg)' \leq f'g + fg'$ und $(fg)' \geq f'g + fg'$.

Zunächst zeigen wir “ \geq ”. Wir haben für alle $x, y \in \mathbb{Y}$

$$\begin{aligned} & f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))y \\ & \leq f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))y + f'(x)g'(x)y^2 \\ & = (f(x) + f'(x)y)(g(x) + g'(x)y) \leq f(x+y)g(x+y) \end{aligned}$$

Dies impliziert $(fg)' \geq f'g + fg'$.

Nun zeigen wir “ \leq ”. Sei $\varepsilon > 0$

Wähle η klein so dass

$$\eta(g(x) + f(x) + 1) \leq \varepsilon.$$

(Dies geht wegen Steitigkeit des Produktes by 0)

Wähle y so klein dass

$$y\eta \leq 1$$

$$f'(x)g'(x)y < \varepsilon$$

$$f(x+y) \leq f(x) + (f'(x) + \eta)y$$

$$g(x+y) \leq g(x) + (g'(x) + \eta)y$$

Die letzten zwei sind möglich nach der Lokalität der Ableitung.

Wir haben

$$\begin{aligned} & f(x+y)g(x+y) \leq (f(x) + (f'(x) + \eta)y)(g(x) + (g'(x) + \eta)y) \\ & \leq f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))y + \eta(f(x) + g(x) + \eta y)y + f'(x)g'(x)y^2 \\ & < f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + 2\varepsilon)y \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt $(fg)' \leq f'g + fg'$.

□

Mit der Produktregel können wir nun per Induktion Ableitungsregel für Monome zeigen: Wir definieren rekursiv für $n \in \mathbb{N}$: $x^0 = 1$, $x^{n+1} = x^n \cdot x$.

Satz 8.3. *Sei $n \geq 1$ und sei $f(x) = x^n$. Dann ist f monoton wachsend und konvex, und es gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Beweis. Der Fall $n = 1$ ist der Fall der linearer Funktionen $f(x) = x$ und bereits festgestellt.

Sei der satz für gewisses n bereits bewiesen. Dann ist $g(x) = x^n$ monoton wachsend und konvex und $h(x) = x$ ist auch monoton wachsend und konvex

und aus der Produktregel folgt dass $f(x) = x^{n+1}$ monoton wachsend und konvex ist und

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = nx^{n-1} + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n$$

□

◇ ————— Ende Vorlesung 18, 04.12.2014 ————— ◇

9 Potenzreihen

Die bisher kennengelernten Eigenschaften der Ableitung erlauben uns bereits, *Polynome* abzuleiten. Ein *Polynom* ist eine Funktion von der Form

$$f(x) = \sum_{m=0}^M a_m x^m,$$

wobei $M \in \mathbb{N}$ und die Glieder der Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{X}$ die Koeffizienten des Polynoms bilden. Die Ableitung dieser endlichen Summe ist gegeben durch

$$f'(x) = \sum_{m=1}^M a_m m x^{m-1}.$$

Um auch durch unendliche Summen definierte Funktionen ableiten zu können bedarf es noch eines Satzes.

Satz 9.1. *Sei f_n eine monoton wachsende Folge monoton wachsender Funktionen $f_n : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$. Setze*

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

Dann ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ monoton wachsend und es gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} F_n(x) = \int_0^x \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) dt.$$

Beweis. 1. $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ist monoton wachsend, denn sei $x < y$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) \leq f_n(y) \leq \sup_m f_m(y).$$

Bilden wir das Supremum über n , folgt

$$\sup_n f_n(x) \leq \sup_m f_m(y).$$

2. Die Behauptung gilt für die unteren Riemannschen Summen:

$$\sup_n L_k(f_n, 0, x) = L_k(\sup_n f, 0, x),$$

weil das Supremum monoton wachsender Funktionen mit endlichen Summen vertauscht. Also gilt

$$\begin{aligned} \sup_n F_n(x) &= \sup_n \sup_k L_k(f_n, 0, x) = \sup_k \sup_n L_k(f_n, 0, x) \\ &= \sup_k L_k(\sup_n f_n, 0, x) = \int_0^x \sup_n f_n(t) dt. \end{aligned}$$

□

Korollar 9.2. Ist $\sup_n F_n(R) < \infty$, so gilt für alle $x < R$,

$$(\sup_n F_n)'(x) = \sup_n f_n(x).$$

Das folgt aus dem vorigen Satz und einer Variante des Hauptsatzes für Funktionen $F : [0, R) \rightarrow \mathbb{X}$.

Eine Funktion der Form

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sup_M \sum_{m=0}^M a_m x^m$$

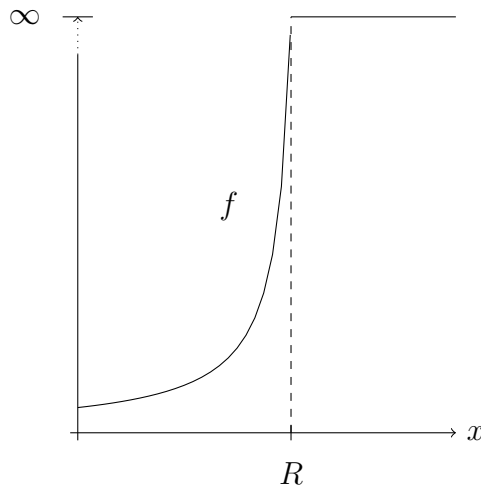
nennt man eine *Potenzreihe*. Wir bleiben zunächst dabei, nur Potenzreihen mit positiven Koeffizienten $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{X}$ zu untersuchen.

Nach dem letzten Satz dürfen wir termweise integrieren und differenzieren:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{1}{m+1} x^{m+1} = \sup_M \sum_{m=0}^M a_m \frac{1}{m+1} x^{m+1}.$$

Ist $f(R) < \infty$ und $x < R$, dann ist

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m x^{m-1}.$$



Die Abbildung zeigt den Graphen einer typischen Potenzreihe. Der Wert steigt an entlang der positiven x -Achse. An einem gewissen Punkt $R \in \overline{\mathbb{X}}$ ($R = \infty$ ist auch möglich) beginnt die Potenzreihe (bestimmt) zu divergieren und nimmt von da an konstant den Wert ∞ an.

Definition 9.3. Der *Konvergenzradius* einer Potenzreihe ist definiert als

$$R := \sup \left\{ x : \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m < \infty \right\}.$$

Jede Potenzreihe ist zumindest am Punkt 0 endlich:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m 0^m = a_0 < \infty.$$

Man beachte dabei, dass $0^0 := 1$ per Definition gilt.

Beispiele. 1. Sei $a_m = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die erhaltene Potenzreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m$$

ist die *geometrische Reihe*. Für $x = 1$ divergiert die geometrische Reihe: $\sum_{m=0}^{\infty} 1 = \infty$. Also gilt für den Konvergenzradius $R \leq 1$. Falls $0 < x < 1$, existiert $0 < y < 1$ mit $x + y = 1$. Dann gilt

$$(x + y) \cdot \sum_{m=0}^M x^m + x^{M+1} = \sum_{m=0}^{M+1} x^m = 1 + x \cdot \sum_{m=0}^M x^m.$$

Durch Auslöschung von $x \cdot \sum_{m=0}^M x^m$ auf beiden Seiten und wegen $x^{m+1} \geq 0$ folgt

$$y \cdot \sum_{m=0}^M x^m \leq 1.$$

Sei $N < \infty$ so gewählt, dass $y \cdot N > 1$. Dann folgt

$$\sum_{m=0}^M x^m \leq N < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe für $0 < x < 1$ (eigentlich) und es folgt $R = 1$. Genauer erhält man durch Auflösen nach der Summe von 0 bis M in der obigen Gleichung die Identität

$$\sum_{m=0}^M x^m = \frac{1 - x^{M+1}}{1 - x}.$$

Daraus folgt auch leicht die Formel für den Grenzwert der geometrischen Reihe unterhalb des Konvergenzradius:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1 - x}.$$

2. Sei $a_m = \frac{1}{m!}$, wobei $0! = 1$ und $(m+1)! = (m+1) \cdot m!$ ¹¹ Wir definieren die *Exponentialfunktion* als

$$\exp(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m.$$

Wegen

$$\exp(x) \leq \sum_{m=0}^{\infty} x^m < \infty$$

konvergiert die Reihe zumindest für $x < 1$. Der Konvergenzradius von \exp ist also mindestens $R \geq 1$. Wir werden später sehen, dass $R = \infty$ gilt, i.e. $\exp(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{X}$. Wir berechnen die Ableitung von \exp durch termweises Differenzieren. Für $x < R$ gilt

$$\exp'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m!} x^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = \exp(x).$$

¹¹ $m!$ wird gelesen als *m Fakultät*.

Durch Induktion sieht man leicht, dass diese Potenzreihe die einzige ist, die im Punkt 0 den Wert 1 annimmt und gleich ihrer termweisen Ableitung ist.

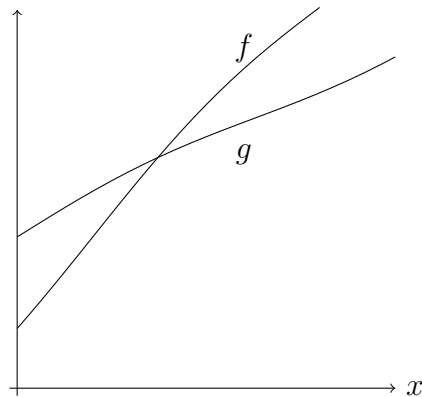
Satz 9.4. Seien $f, g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ monoton wachsende Funktionen. Wir nehmen an, dass es ein $x_0 \in \overline{\mathbb{X}}$ gibt, sodass

$$\begin{aligned}\forall x \leq x_0 : f(x) &\leq g(x), \\ \forall x \geq x_0 : f(x) &\geq g(x).\end{aligned}$$

Dann existiert ein $x_1 \geq x_0$, $x_1 \in \overline{\mathbb{X}}$ mit

$$\begin{aligned}\forall x \leq x_1 : \mathcal{I}(f)(x) &\leq \mathcal{I}(g)(x), \\ \forall x \geq x_1 : \mathcal{I}(f)(x) &\geq \mathcal{I}(g)(x).\end{aligned}$$

Die Voraussetzung des Satzes besagt, dass f zunächst kleiner als g ist, bis sich an einem Punkt x_0 die beiden Funktionen schneiden und dann f größer als g ist. Die Abbildung verdeutlicht dies. Die Aussage des Satzes ist nun, dass dieses Bild qualitativ erhalten bleibt, wenn man zu den Stammfunktionen von f und g übergeht. Dabei kann sich der Schnittpunkt jedoch nach rechts verschieben.



Beweis. 1. Sei $x \leq x_0$. Dann gilt

$$\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x g(t)dt,$$

da $f \leq g$ auf $[0, x)$.

2. Fall (a): $\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x g(t)dt$ für alle $x \in \mathbb{Y}$. Dann setze einfach $x_1 = \infty$.

Fall (b): Es gibt ein $x \in \mathbb{Y}$, sodass $\int_0^x f(t)dt > \int_0^x g(t)dt$. Setze

$$x_1 = \inf \left\{ x : \int_0^x f(t)dt > \int_0^x g(t)dt \right\}.$$

Nach Teil 1. gilt $x_0 \leq x_1 < \infty$. Für alle $x < x_1$ gilt

$$\mathcal{I}(f)(x) \leq \mathcal{I}(g)(x).$$

Also gilt $\mathcal{I}(f)(x) \leq \lim_{\nearrow} \mathcal{I}(g)(x_1)$. Es folgt

$$\lim_{\nearrow} \mathcal{I}(f)(x_1) \leq \lim_{\nearrow} \mathcal{I}(g)(x_1).$$

Sei $x > x_1$. Wähle $x > x_2 > x_1$ mit $\mathcal{I}(f)(x_2) \geq \mathcal{I}(g)(x_2)$, das ist möglich nach Definition von x_1 . Also auch $\mathcal{I}(f)(x) \geq \mathcal{I}(g)(x_2)$. Es folgt $\mathcal{I}(f)(x) \geq \lim_{\searrow} \mathcal{I}(g)(x_1)$, also insgesamt

$$\lim_{\searrow} \mathcal{I}(f)(x_1) \geq \lim_{\searrow} \mathcal{I}(g)(x_1).$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{I}(f)(x_1) = \mathcal{I}(g)(x_1)$. Zuletzt gilt für $x \geq x_1$:

$$\mathcal{I}(f)(x) = \mathcal{I}(f)(x_1) + \int_{x_1}^x f(t)dt \geq \mathcal{I}(g)(x_1) + \int_{x_1}^x g(t)dt = \mathcal{I}(g)(x).$$

□

Definition 9.5. Sei $R \in \overline{\mathbb{X}}$. Eine Funktion $f : [0, R) \cap \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ heißt *einfach (1-fach) monoton wachsend*, falls f monoton wachsend ist.

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt f *(n + 2)-fach monoton wachsend*, falls f (n + 1)-fach monoton wachsend ist und $f^{(n)}$ konvex ist.

f heißt *absolut monoton*, falls für alle $n \geq 1$, f n-fach monoton wachsend ist.

Eine Funktion f ist also absolut monoton, wenn

$$f \geq 0, f' \geq 0, f'' \geq 0, f^{(3)} \geq 0, \dots$$

Beispiel. Potenzreihen (mit positiven Koeffizienten) sind absolut monoton.

Der nächste Satz zeigt, dass absolut monotone Funktionen durch Potenzreihen darstellbar sind.

Satz 9.6 (Hausdorff-Bernstein-Widder). *Ist $f : [0, R) \rightarrow \mathbb{X}$ absolut monoton, dann gilt für alle $0 \leq x < R$:*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m.$$

Insbesondere konvergiert die Reihe gegen einen endlichen Wert.

Man bezeichnet die Potenzreihe aus dem Satz als *Taylorreihe* von f .

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für alle $0 \leq x < R$ gilt:

$$f(x) \geq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m. \quad (52)$$

Wir führen eine Induktion durch um die folgende Aussage für alle $M \in \mathbb{N}$ zu zeigen:

$$\forall f : \mathbb{Y} \cap [0, R) \rightarrow \mathbb{X} \text{ absolut monoton } \forall 0 \leq x < R : \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m \leq f(x).$$

Für $M = 0$ ist die Behauptung klar, da f monoton wachsend ist:

$$f(x) \geq f(0) = \sum_{m=0}^0 \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m.$$

Sei die Behauptung wahr für ein $M \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung) und sei f absolut monoton. Nach Induktionsvoraussetzung angewandt auf f' gilt für $0 \leq x < R$:

$$f'(x) \geq \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(0) x^m.$$

Durch Integration folgt daraus

$$f(0) + \int_0^x f'(t) dt \geq f(0) + \int_0^x \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(0) t^m dt.$$

Nach dem Hauptsatz gilt also

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(0) + \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(0) \frac{1}{m+1} x^{m+1} \\ &= f(0) + \sum_{m=0}^M \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(0) x^{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{M+1} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m. \end{aligned}$$

Dies zeigt (52) durch Induktion. Es bleibt noch die umgekehrte Ungleichung zu (52) zu zeigen. Dazu beweisen wir die folgende Behauptung.

Behauptung.

$$\forall M \in \mathbb{N} \forall f : [0, R) \rightarrow \mathbb{X} \text{ absolut monoton } \forall a > f^{(M)}(0) \exists x_0 \in \overline{\mathbb{X}} :$$

$$\forall x \leq x_0 : \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m + \frac{1}{M!} a x^M \geq f(x),$$

$$\forall x \geq x_0 : \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m + \frac{1}{M!} a x^M \leq f(x).$$

Die Behauptung folgt durch Induktion über M . Für $M = 0$ wählt man mit dem Zwischenwertsatz x_0 so dass $a = f(x_0)$ und die Behauptung folgt wegen Monotonizität von f . Für den Induktionsschritt wendet man ähnlich wie im vorigen Induktionsargument die Induktionsannahme auf die Funktion f' an und zeigt dann den Induktionsschritt unter Verwendung des vorigen Satzes 9.4 .

Sei $0 \leq x < R$. Wähle a , sodass

$$\sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m + \frac{1}{(M+1)!} a x^{M+1} = f(x) + 1.$$

Dann gilt $a > f^{(M+1)}(0)$ wegen des ersten Teils des Beweises. Für $y < x \leq x_0$ folgt nach Behauptung, dass

$$\sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) y^m + \frac{1}{(M+1)!} a y^{M+1} \geq f(y).$$

Nach Konstruktion gilt $a \leq (M+1)! \frac{f(x)+1}{x^{M+1}}$. Daraus folgt

$$\frac{1}{(M+1)!} a y^{M+1} \leq \left(\frac{y}{x}\right)^{M+1} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

wegen $y < x$ und damit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) y^m \geq f(y).$$

□

Satz 9.7 (Eindeutige Fortsetzbarkeit absolut monotoner Funktionen). *Seien f, g absolut monotone Funktionen auf $[0, R) \rightarrow \mathbb{X}$. Sei $0 < r < R$ und $\forall x < r : f(x) = g(x)$. Dann gilt*

$$\forall 0 < x < R : f(x) = g(x).$$

Beweis. Auf ganz $[0, R)$ sind f und g gleich ihrer Taylorreihen. Auf $[0, r)$ gilt $f^{(n)} = g^{(n)}$ für alle n , also insbesondere $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$. Also stimmen die Taylorreihen von f und g überein. \square

◇ ————— Ende Vorlesung 19, 09.12.2014 ————— ◇

10 Die Exponentialfunktion

Wir haben bereits gesehen, dass die Exponentialfunktion $\exp(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m$ gleich ihrer eigenen Ableitung ist und einen Konvergenzradius $R \geq 1$ hat. Außerdem ist \exp absolut monoton. Der Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder erlaubt einen einfachen Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Satz 10.1. *Für alle $x, y \in \mathbb{Y}$ mit $x + y < R$ gilt*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

Wir werden im Anschluss sehen, dass $R = \infty$, also gilt der Satz für alle $x, y \in \mathbb{Y}$.

Beweis. Sei $x < R$. Definiere $f(y) = \exp(x+y)$. Dann ist $f^{(n)}(y) = \exp^{(n)}(x+y) = \exp(x+y) = f(y)$ für alle n . Insbesondere, $f^{(n)}(0) = \exp(x+0) = \exp(x)$. Nach dem Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder gilt also

$$\begin{aligned} \exp(x + y) = f(y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) y^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \exp(x) y^m \\ &= \exp(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} y^m = \exp(x) \exp(y) \end{aligned}$$

für alle y mit $x + y < R$. Hier haben wir $\exp(x)$ aus der Taylorreihe herausgezogen unter Verwendung der Stetigkeit der Funktion $z \mapsto \exp(x)z$. \square

Satz 10.2. *Der Konvergenzradius der Exponentialreihe ist unendlich.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch. Sei $R < \infty$ angenommen. Wähle ein x mit $0 < x < R$. Definiere

$$f(y) = \begin{cases} \exp(y), & 0 \leq y < R, \\ \exp(x) \exp(y - x), & x < y < R + x. \end{cases}$$

Für $x < y < R$ ist die Funktion scheinbar zweimal definiert, allerdings stimmen die Definitionen überein nach der Funktionalgleichung $\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x)$. Wieder nach dem Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} y^m = f(y) < \infty$$

für alle $y < R+x$. Da $x > 0$ ist das ein Widerspruch! \square

Nicht nur erfüllt die Exponentialreihe die obige Funktionalgleichung, sie ist auch im wesentlichen die einzige stetige Funktion, die die Funktionalgleichung erfüllt und im Punkt 1 den Wert $\exp(1)$ annimmt.

Satz 10.3. Sei $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ eine Funktion mit $\forall x, y \in \mathbb{Y} : f(x+y) = f(x)f(y)$ und $f(1) \geq 1$. Dann existiert ein $b \in \mathbb{X}$ mit $f(x) = \exp(bx)$ für alle $x \in \mathbb{Y}$.

Beweis. Es gilt

$$\exp(0) = 1 \leq f(1) < 1 + f(1) \leq 1 + f(1) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} (f(1))^m = \exp(f(1)).$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $b \in \mathbb{X}$ mit $\exp(b) = f(1) = \exp(b \cdot 1)$.

Behauptung. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right) = \exp\left(b \cdot \frac{1}{2^k}\right).$$

Beweis durch Induktion. Für $k=0$ ist die Behauptung klar nach Konstruktion von b . Angenommen, die Behauptung gilt für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) &= f\left(\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \exp\left(b \cdot \frac{1}{2^k}\right) = \exp\left(b \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) \\ &= \exp\left(b \cdot \frac{1}{2^{k+1}} + b \cdot \frac{1}{2^{k+1}}\right) = \exp\left(b \cdot \frac{1}{2^{k+1}}\right) \exp\left(b \cdot \frac{1}{2^{k+1}}\right) \end{aligned}$$

Wir benötigen jetzt die Tatsache, dass die Quadratfunktion injektiv ist. Bei dieser Gelegenheit zeigen wir ein etwas allgemeineres Resultat.

Hilfssatz 10.4. Ist $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ absolut monoton, dann ist f konstant oder injektiv.

Insbesondere ist die Quadratfunktion injektiv.

Beweis des Hilfssatzes. Fall 1: Es gibt ein $x > 0$ mit $f'(x) = 0$. Dann gilt für $0 \leq y < x$, dass

$$0 \leq f'(y) \leq f'(x) = 0,$$

also $f'(y) = 0$. Nach dem Satz zur eindeutigen Fortsetzung absolut monotoner Funktionen folgt $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{Y}$. Also ist f konstant.

Fall 2: Für alle $x > 0$ gilt $f'(x) > 0$. Dann gilt für $0 \leq y < s < z$:

$$f(z) = f(s) + \int_s^z f'(t) dt \geq f(s) + \int_s^z f'(y) dt = f(s) + (z-s)f'(s) > f(s) \geq f(y).$$

Also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. □

Damit ist auch der Induktionsbeweis der obigen Behauptung abgeschlossen.

Behauptung. Für alle n, k gilt $f\left(\frac{n}{2^k}\right) = \exp\left(b \cdot \frac{n}{2^k}\right)$.

Induktion nach n . Für $n = 0$ haben wir $f(0)f(1) = f(1+0) = f(1)$, also $f(0) = 1$. Außerdem ist $\exp(b \cdot 0) = 1$. Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n+1}{2^k}\right) &= f\left(\frac{n}{2^k}\right) f\left(\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \exp\left(b \cdot \frac{n}{2^k}\right) \exp\left(b \cdot \frac{1}{2^k}\right) = \exp\left(b \cdot \frac{n+1}{2^k}\right). \end{aligned}$$

□

Falls $f(1) = a \geq 1$, so schreiben wir $a^x := f(x)$ (lies: a hoch x). Dank der Funktionalgleichung stimmt diese Definition mit der elementaren Potenzierung durch natürliche Zahlen überein. Wir erhalten a^x automatisch als eine absolut monotone Funktion, die damit eindeutig auf \mathbb{X} fortsetzbar ist. Wie bereits bemerkt, schreibt man außerdem e für $\exp(1)$, sodass per Definition $\exp(x) = e^x$ gilt. Dies motiviert auch die Bezeichnung *Exponentialfunktion*.

Bemerkungen. Mit den Bezeichnungen aus dem obigen Satz:

1. Ist $f(1) = a \geq 1$, so setze $b =: \ln(a)$ (der *natürliche Logarithmus* von a).¹²
2. $a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$.

¹² b ist eindeutig bestimmt.

$$3. (a^x)^y = (e^{\ln(a) \cdot x})^y = e^{(\ln(a) \cdot x) \cdot y} = e^{\ln(a) \cdot (x \cdot y)} = a^{x \cdot y}.$$

4. Für alle $n \geq 1$ gilt

$$1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} < \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^m = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Daraus folgert man leicht (Übung) die bekannte alternative Darstellung von e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Definition 10.5. Der *Kosinus Hyperbolicus* ist definiert als

$$\cosh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n \text{ gerade}} \frac{1}{n!} x^n.$$

Der *Sinus Hyperbolicus* ist definiert als

$$\sinh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n!} x^n.$$

Die Funktionen \cosh und \sinh sind absolut monotone Funktionen mit Konvergenzradius ∞ wie die Abschätzungen $\cosh(x) \leq e^x$, $\sinh(x) \leq e^x$ zeigen. Außerdem gilt

$$\cosh'(x) = \sum_{n \text{ gerade}, n > 0} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n \text{ gerade}, n > 0} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n!} x^n = \sinh(x),$$

$$\sinh'(x) = \cosh(x),$$

$$\cosh^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Satz 10.6.

$$1 + \sinh \cdot \exp = \cosh \cdot \exp$$

Beweis. Wir nennen die Funktion auf der linken Seite f und die Funktion auf der rechten Seite g . Dann gilt $f(0) = 1 + 0 \cdot 1 = 1$ und $g(0) = 1 \cdot 1 = 1$. Außerdem

$$f' = \cosh \cdot \exp + \sinh \cdot \exp = g'.$$

Für $n \geq 0$ gilt also $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$. Da f, g absolut monoton sind¹³ folgt $f = g$ mit Hausdorff-Bernstein-Widder. \square

¹³Produkte absolut monotoner Funktionen sind absolut monoton (Übung).

Der Satz sagt aus, dass

$$\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

gilt. Außerdem gilt nach Definition

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \exp(x).$$

Wir können $\exp(-x)$ definieren indem wir (so verfährt man allgemein mit Potenzreihen) setzen

$$\exp(-x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-x)^m = \cosh(x) - \sinh(x),$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die Summe umsortiert haben, was natürlich wegen absoluter Summierbarkeit möglich ist.

Für $x \in \mathbb{Y}$ definiert man die negative Potenz e^{-1} in natürlicher Weise durch die mit der Funktionalgleichung konsistente Forderung

$$e^{-x} e^x = e^0 = 1.$$

Dann gilt nach dem letzten Satz $e^{-x} = \exp(-x)$, wie man sich das erhoffen würde.

Die der Funktionalgleichung für \exp entsprechenden Gleichungen sind die Folgenden *Additionstheoreme* für \cosh und \sinh .

Satz 10.7. *Für alle $x, y \in \mathbb{Y}$ gilt*

$$\begin{aligned} \cosh(x + y) &= \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y), \\ \sinh(x + y) &= \cosh(x) \sinh(y) + \sinh(x) \cosh(y). \end{aligned}$$

Beweis. Sei x fest gewählt und setze $f(y) = \cosh(x + y)$, sowie $g(y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned} f'(y) &= \sinh(x + y), \\ g'(y) &= \cosh(x) \sinh(y) + \sinh(x) \cosh(y). \end{aligned}$$

Weiter ist $f''(y) = \cosh(x + y) = f(y)$ und $g''(y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) = g(y)$. Damit folgt $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, also wegen absoluter Monotonie $f = g$ und $f' = g'$, was zu zeigen war. \square

Definition 10.8. Sei $f_j(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(4m+j)!} x^{4m+j}$ für $j = 0, 1, 2, 3$. Definiere den *Kosinus* durch

$$\cos := f_0 - f_2$$

und den *Sinus* durch

$$\sin := f_1 - f_3.$$

Es gilt $f'_j = f_{j-1}$ für $j = 1, 2, 3$ und $f'_0 = f_3$. Daraus folgt

$$\cos' = f_3 - f_1 = -\sin \text{ und } \sin' = f_0 - f_2 = \cos.$$

Außerdem gilt

$$\cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0, & n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 0, & n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

◇ ————— Ende Vorlesung 20, 11.12.2014 ————— ◇

11 Reell analytische Funktionen

Definition 11.1. Eine Funktion $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *reell analytisch im Punkt 0*, falls $f = g - h$ auf einem Intervall $[0, R)$, wobei g, h absolut monotone Funktionen mit Konvergenzradius mindestens R sind.

f heißt *reell analytisch im Punkt $x > 0$* , falls es ein $0 \leq x' < x$ gibt, sodass $\tilde{f}(y) = f(x' + y)$ reell analytisch im Punkt 0 ist und $x' + R > x$ gilt.

f heißt *reell analytisch*, falls f reell analytisch in jedem Punkt $x \in \mathbb{X}$ ist.

Wir sagen, dass eine reell analytische Funktion *lokal* durch eine Potenzreihe darstellbar ist (nämlich genau ihre Taylorreihe).

Beispiel. Sei $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Dann gilt für $0 \leq x < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-x)^m = \underbrace{\sum_{m \text{ gerade}} x^m}_{=:g} - \underbrace{\sum_{m \text{ ungerade}} x^m}_{=:h}.$$

Damit ist f reell analytisch im Punkt 0. Allerdings haben g und h nur Konvergenzradius 1. Diese Taylorreihe kann also nicht verwendet werden, um f

auf ganz \mathbb{X} darzustellen. Trotzdem ist f reell analytisch, denn sei zunächst $x > 0$ fix. Dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y) &:= \frac{1}{1+x+y} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+\frac{y}{1+x}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1+x} \left(-\frac{y}{1+x}\right)^m \\ &= \sum_{m \text{ gerade}} \frac{1}{1+x} \left(\frac{y}{1+x}\right)^m - \sum_{m \text{ ungerade}} \frac{1}{1+x} \left(\frac{y}{1+x}\right)^m.\end{aligned}$$

Diese Darstellung konvergiert für $y < 1+x$. Da x beliebig war, ist f reell analytisch.

Wir definieren nun die Addition, Subtraktion, Ableitung und Integration von reell analytischen Funktionen durch die entsprechenden Operationen angewandt auf die darstellenden absolut monotonen Funktionen. Seien f, f_1, f_2 reell analytisch bei einem Punkt x und $f = g-h$, $f_1 = g_1-h_1$ und $f_2 = g_2-h_2$ Zerlegungen in absolut monotone Funktionen bei x . Dann definieren wir

$$\begin{aligned}f_1 + f_2 &:= (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2), \\ f_1 f_2 &:= (g_1 h_1 + g_2 h_2) - (g_1 h_2 + g_2 h_1), \\ f' &:= g' - h', \\ \int_a^b f(t) dt &:= \int_a^b g(t) dt - \int_a^b h(t) dt.\end{aligned}$$

Dabei sind die Zerlegungen als vom jeweils gewählten Punkt abhängig zu verstehen. Nichtsdestotrotz sind alle diese Operationen wohldefiniert, i.e. sie hängen nicht von der (lokalen) Wahl der absolut monotonen Funktionen ab (Übung). Außerdem vertragen sich die so definierten Operationen mit den schon für absolut monotone Funktionen definierten Operationen.

In der folgenden Diskussion beschränken wir uns der Bequemlichkeit halber auf reell analytische Funktionen im Punkt 0. Dies ist jedoch nicht wesentlich, sondern erleichtert bloß die Notation. Jede reell analytische Funktion im Punkt 0 ist gleich ihrer absolut konvergenten Taylorreihe

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \quad h = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m, \quad f = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m - b_m) x^m.$$

Seien R_f, R_g, R_h die Konvergenzradien der Taylorreihen von f, g bzw. h . Es gilt $R_f \geq \min(R_g, R_h)$. Man kann g, h so wählen, dass $R_f = \min(R_g, R_h)$.

Wir können die Taylorreihe wie gewohnt termweise addieren, differenzieren und integrieren, z.B.

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - b_m) m x^{m-1}.$$

Dies prüft man anhand der Definitionen und bekannten Eigenschaften absolut monotoner Funktionen leicht nach. Wir können Potenzreihen auch multiplizieren. Dazu nehmen wir zunächst an, dass $a_m, b_m \in \mathbb{X}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) &= \sup_M \left(\left(\sum_{k=0}^M a_k x^k \right) \left(\sum_{n=0}^M b_n x^n \right) \right) \\ &= \sup_M \left(\sum_{m=0}^M \left(\sum_{k+n=m} a_k b_n \right) x^m + \sum_{m=M+1}^{2M} \underbrace{c_m}_{\leq \sum_{k+n=m} a_k b_n} x^m \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k+n=m} a_k b_n \right) x^m. \end{aligned}$$

Dies überträgt sich auf reell analytische Funktionen.

Wir können eine positive Potenzreihe auch durch x dividieren. Falls $a_0 = 0$, $x > 0$, dann ist

$$\frac{1}{x} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right) = \frac{1}{x} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m \right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} x^m.$$

eine neue absolut monotone Funktion mit Konvergenzradius wie f , denn

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m-1} \leq \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = f'(x).$$

In anderen Worten, $\frac{1}{x} f(x)$ ist stetig fortsetzbar in $x = 0$. Gleiches gilt auch für reell analytische Funktionen.

So lässt sich auch der Differenzenquotient interpretieren. Sei x fest, dann ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eine Potenzreihe in h , die für $h = 0$ den Wert $f'(x)$ annimmt, denn $f(x+h) - f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m h^m$. Allgemein ist

$$\frac{f(x+h) - \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m}{x^{M+1}}$$

eine Potenzreihe mit gleichem Konvergenzradius wie f .

12 Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Im Folgenden versuchen wir, die Definition von \sin und \cos mit der aus der Schule bekannten elementar-geometrischen Definition in Einklang zu bringen.

Satz 12.1.

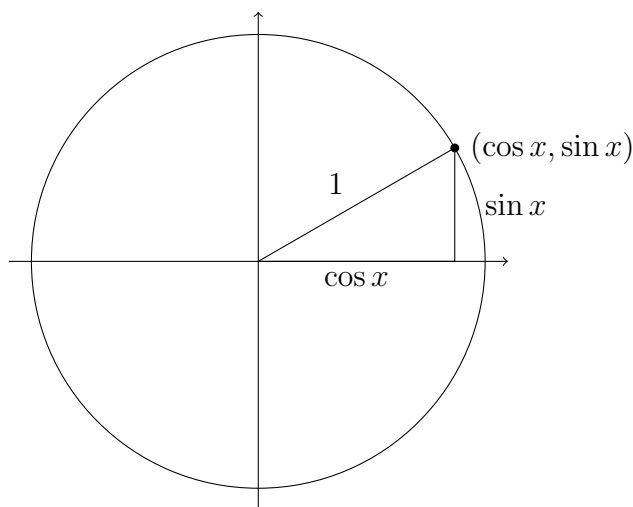
$$\cos \cdot \cos + \sin \cdot \sin = 1.$$

Beweis. Für $x = 0$ gilt Gleichheit. Die Ableitung der Funktion auf der linken Seite ist

$$(-\sin) \cdot \cos + \cos \cdot (-\sin) + \cos \cdot \sin + \sin \cdot \cos = 0.$$

Dies ist auch die Ableitung der rechten Seite. Also stimmen auch alle höheren Ableitungen beider Seiten im Punkt 0 überein, i.e. beide Seiten haben die gleiche Taylorreihe und stimmen also überein. \square

Dieser Satz hat eine elementar-geometrische Interpretation anhand des aus der Schule bekannten Satzes von Pythagoras.



Der Satz sagt aus, dass die Punkte der Form $(\cos x, \sin x)$ auf dem Einheitskreis, i.e. dem Kreis um den Ursprung mit Radius 1 liegen.

Satz 12.2 (Additionstheoreme).

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y.\end{aligned}$$

Beweis. Es sei x fest gewählt und $f(y) = \cos(x + y)$, $g(y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Es gilt $f(0) = g(0)$. Außerdem gilt $f'(y) = -\sin(x + y)$ und

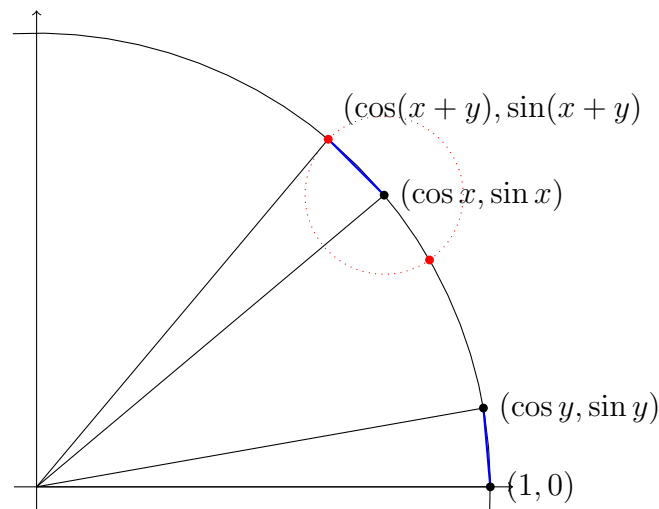
$$g'(y) = -\cos x \sin y - \sin x \cos y.$$

Insbesondere $f'(0) = g'(0)$. Weiter ist $f'' = -f$ und $g'' = -g$. Damit folgt

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$$

für alle $n \geq 0$, also stimmen die Taylorreihen von f und g überein und damit gilt $f = g$. Die zweite Gleichung ist gerade $-f' = -g'$ und gilt damit auch. \square

Die geometrische Interpretation der Additionstheoreme ist, dass der Abstand von $(\cos y, \sin y)$ zu $(1, 0) = (\cos 0, \sin 0)$ gleich dem Abstand von $(\cos(x + y), \sin(x + y))$ zu $(\cos(x), \sin(x))$ ist.



Tatsächlich ist wegen der Additionstheoreme

$$(\cos(x + y), \sin(x + y)) - (\cos(x), \sin(x)) = (\cos(x)(\cos(y) - 1) - \sin(x) \sin(y), \sin(x)(\cos(y) - 1) + \cos(x) \sin(y))$$

Die Länge dieses Vektors zum Quadrat ist also gleich

$$\begin{aligned} & (\cos(x)(\cos(y) - 1) - \sin(x) \sin(y))^2 + (\sin(x)(\cos(y) - 1) + \cos(x) \sin(y))^2 \\ &= \cos(x)^2(\cos(y) - 1)^2 + \sin(x)^2 \sin(y)^2 - 2 \sin(x) \cos(x) \sin(y)(\cos(y) - 1) \\ &+ \sin(x)^2(\cos(y) - 1)^2 + \cos(x)^2 \sin(y)^2 + 2 \sin(x) \cos(x) \sin(y)(\cos(y) - 1) \\ &= (\sin(x)^2 + \cos(x)^2)(\cos(y) - 1)^2 + (\sin(x)^2 + \cos(x)^2) \sin(y)^2 \\ &= (\cos(y) - 1)^2 + \sin(y)^2 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist gerade das Quadrat der Länge des Vektors

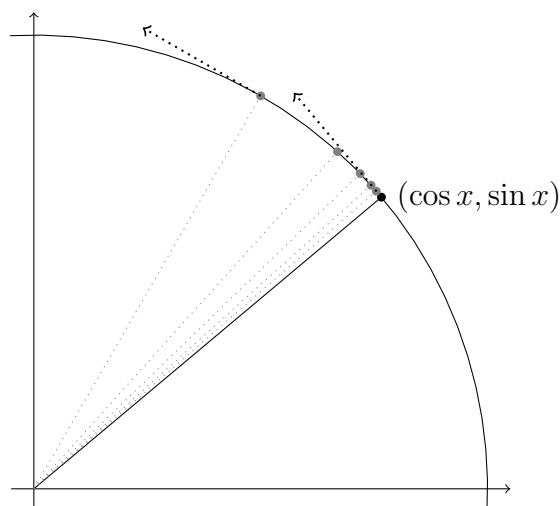
$$(\cos(y), \sin(y)) - (1, 0).$$

In der Abbildung bedeutet dies, dass die beiden blauen Geradenabschnitte die gleiche Länge haben. Wenn wir also bereits wissen, wo sich die Punkte $(\cos(y), \sin(y))$, $(\cos(x), \sin(x))$ auf dem Einheitskreis befinden, dann gibt es wegen der Additionstheoreme nur noch zwei mögliche Positionen für den Punkt $(\cos(x+y), \sin(x+y))$, da der Kreis um $(\cos(x), \sin(x))$ mit dem Radius $\sqrt{(\cos(y) - 1)^2 + \sin(y)^2}$ den Einheitskreis in genau zwei Punkten schneidet (in der Abbildung rot).

Man kann jedoch sehen, dass die Abbildung $y \mapsto (\cos(x+y), \sin(x+y))$ den Punkt $(\cos(x), \sin(x))$ „gegen den Uhrzeigersinn“ entlang des Einheitskreises bewegt. Um dies einzusehen, stelle man sich vor, dass y sehr klein ist. Dann lassen sich $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ „in erster Näherung“ durch die ersten Terme ihrer Taylorentwicklung angeben als

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x) + (-\sin(x))y + R_1(y), \\ \sin(x+y) &= \sin(x) + \cos(x)y + R_2(y).\end{aligned}$$

wobei R_1, R_2 jeweils den Rest der Taylorentwicklung enthalten, den wir zum Zweck dieser Betrachtung ignorieren, da er von der Ordnung y^2 ist, also für kleine y nur einen verschwindend kleinen Absolutbetrag hat.



Der Punkt $(\cos(x+y), \sin(x+y))$ „bewegt“ sich also von $(\cos(x), \sin(x))$ ausgehend in die Richtung $(-\sin(x), \cos(x))$.

Für kleine y ist damit also elementar-geometrisch klar, dass $(\cos(x+y), \sin(x+y))$ aus $(\cos(x), \sin(x))$ durch Drehung um den Winkel y im Uhrzeigersinn hervorgeht.

Für große Winkel y kann man sich die Drehung vorstellen als zusammengesetzt aus vielen Drehungen um kleine Winkel:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos\left(x + n\frac{y}{n}\right) \\ \sin(x+y) &= \sin\left(x + n\frac{y}{n}\right).\end{aligned}$$

Aus der Anschauung sollte nun klar sein, dass \sin und \cos periodische Funktionen sind. Um dies rigoros zu zeigen, bedarf es jedoch noch einiger Arbeit.

Satz 12.3. *Es gibt ein $x > 0$ mit $\cos(x) = 0$.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch. Falls nicht, hat \cos wegen Stetigkeit ein konstantes Vorzeichen. Nehmen wir also an, dass $\cos(x) > 0$ für alle x . Dann ist

$$\sin(x) = \int_0^x \cos(t) dt$$

monoton wachsend und es gilt $\sin(x) \geq 0$ für alle x . Da $\sin \not\equiv 0$, gibt es also ein $x_0 > 0$, sodass

$$\varepsilon := \sin(x_0) > 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\cos\left(x_0 + \frac{1}{\varepsilon}\right) &= 1 - \int_0^{x_0 + \frac{1}{\varepsilon}} \sin(t) dt \leq 1 - \int_{x_0}^{x_0 + \frac{1}{\varepsilon}} \sin(t) dt \\ &\leq 1 - \int_{x_0}^{x_0 + \frac{1}{\varepsilon}} \sin(x_0) dt = 1 - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 0.\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt dabei, weil \sin monoton wachsend ist. Das ist ein Widerspruch. \square

Definition 12.4. Definiere

$$\pi := 2 \cdot \inf\{x > 0 : \cos(x) \leq 0\}.$$

Laut Satz ist die Menge über die hier das Infimum gebildet wird nicht leer und damit π eine wohl-definierte Zahl mit $0 < \pi < \infty$. Per Definition von π und Stetigkeit von \cos gilt

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Wegen Satz 12.1 ist also $\sin(\pi/2) \in \{\pm 1\}$. Aber weil $\cos(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq \pi/2$ (per Definition), gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \geq 0.$$

Daher folgt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Mit den Additionstheoremen folgt außerdem

$$\begin{aligned} (\cos(\pi), \sin(\pi)) &= (-1, 0), \\ (\cos(3\pi/2), \sin(3\pi/2)) &= (0, -1), \text{ und} \\ (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) &= (1, 0) = (\cos(0), \sin(0)). \end{aligned}$$

Satz 12.5. *cos und sin sind 2π -periodische Funktionen, d.h. es gilt*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\sin(2\pi) = \sin(x). \end{aligned}$$

□

Geometrisch/physikalische Interpretation von $\pi/2$. Wir fassen $(\cos t, \sin t)$ als Kurve und t als Zeit auf. Die Geschwindigkeitsvektor der Kurve ist, wie wir bereits gesehen haben, gegeben durch $(-\sin t, \cos t)$. Wegen Satz 12.1 gilt¹⁴

$$\|(-\sin t, \cos t)\| = 1.$$

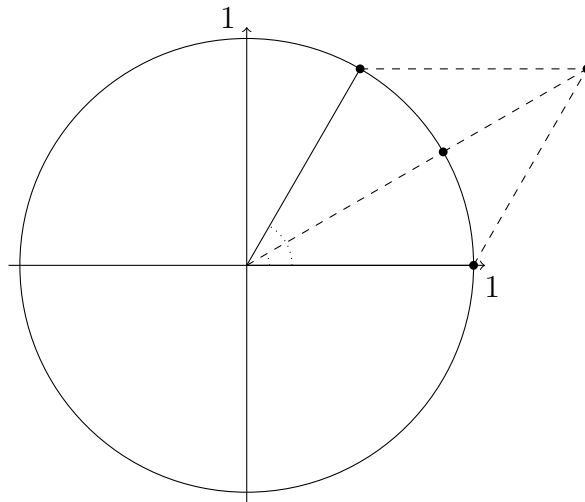
Wir bewegen uns also mit der Geschwindigkeit 1 entlang des Einheitskreises. Zur Zeit $t = \frac{\pi}{2}$ kommen wir am Punkt $(0, 1)$ an. Die zurückgelegte Strecke ist dabei also gerade $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|(\cos' t, \sin' t)\| dt.$$

In diesem Sinne ist die „Länge des Viertelkreisbogens“ gleich $\frac{\pi}{2}$.

Geometrische Konstruktion von $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{2^k}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{2^k}\right)$. Um den Winkel $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^k}$ konstruieren zu können (d.h. mit Zirkel und Lineal), müssen wir einen Winkel halbieren können.

¹⁴Für einen Vektor (x, y) bezeichnet $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ seine Länge.



Dazu konstruiert man die Diagonale im Parallelogramm aus den Punkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\cos(x), \sin(x))$ und $(\cos(x) + 1, \sin(x))$. Diese schneidet den Einheitskreis genau im Punkt $(\cos(x/2), \sin(x/2))$.

Durch Iteration und Additionstheoreme können wir so die Punkte

$$\left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{2^k} \right), \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{2^k} \right) \right)$$

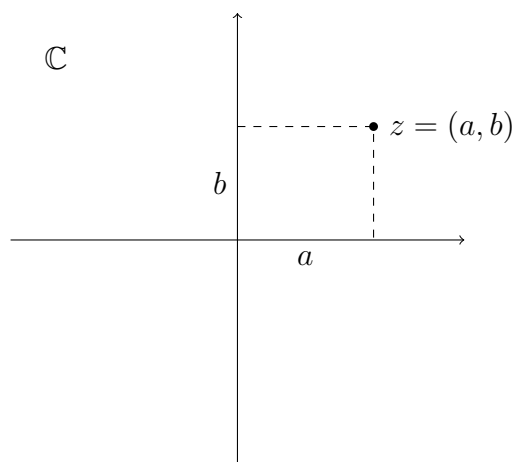
mit Zirkel und Lineal konstruieren.

◇ ————— Ende Vorlesung 21, 16.12.2014 ————— ◇

13 Komplexe Zahlen

Definition 13.1. Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert als

$$\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$



Eine komplexe Zahl kann man sich als Punkt in der *komplexen Eben* vorstellen (siehe Abbildung). Dabei ist per Konvention a die x -Koordinate und b die y -Koordinate. Die Addition zweier komplexer Zahlen $(a, b), (a', b') \in \mathbb{C}$ ist komponentenweise definiert:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Kommutativität und Assoziativität folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften für \mathbb{R} . Das neutrale Element der Addition ist $(0, 0)$ und für ein $(a, b) \in \mathbb{C}$ ist das inverse Element gegeben durch $(-a, -b)$:

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$

Die komplexen Zahlen bilden mit der so definierten Addition also eine kommutative Gruppe.

Die Multiplikation ist definiert durch

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

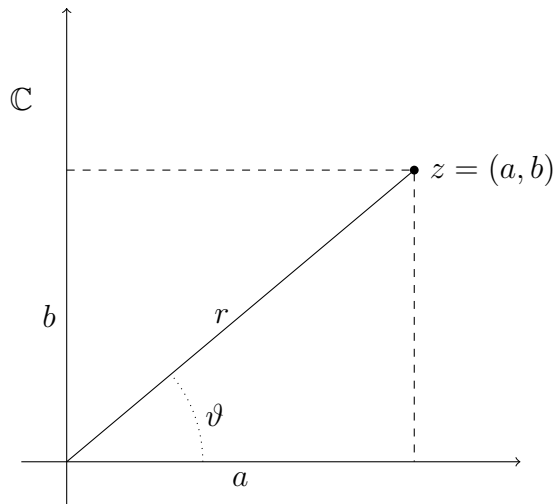
Um die Multiplikation komplexer Zahlen besser zu verstehen ist die Darstellung in *Polarkoordinaten* hilfreich. Sei $(a, b) \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $r \geq 0$ und ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} a = r \cos \vartheta, \\ b = r \sin \vartheta. \end{cases}$$

Falls $(a, b) = (0, 0)$ wähle $r = 0, \vartheta = 0$. Im Folgenden sei $(a, b) \neq (0, 0)$. Sei $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Dann ist $-1 \leq \frac{a}{r} \leq 1$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\tilde{\vartheta} \in [0, \pi]$, sodass

$$\cos(\tilde{\vartheta}) = \frac{a}{r}.$$

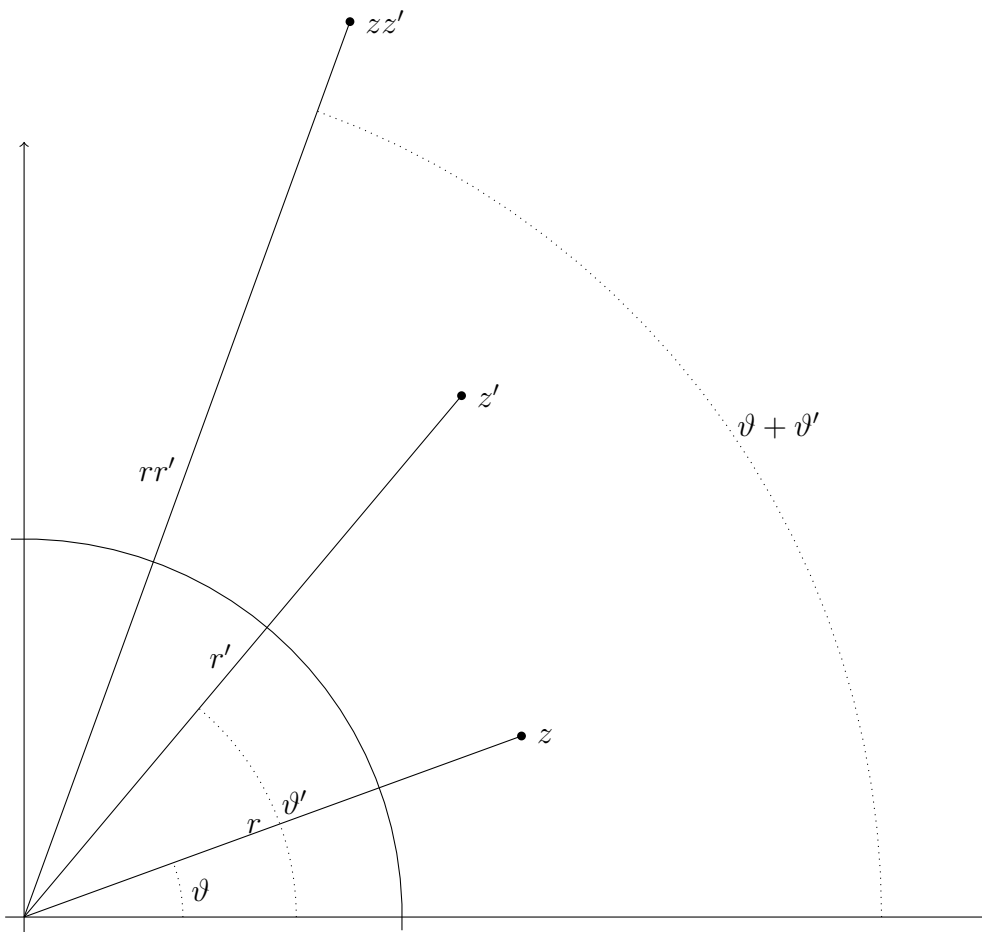
Wegen Satz 12.1 folgt dann sofort $\sin(\vartheta) \in \{\pm b/r\}$. Um das richtige Vorzeichen zu erhalten setzen wir $\vartheta = \tilde{\vartheta}$, falls $b \geq 0$ und $\vartheta = 2\pi - \tilde{\vartheta}$, falls $b < 0$. Man schreibt auch $r = |z|$ und $\vartheta = \arg z$. Man nennt $|z|$ den *Absolutbetrag* von z und $\arg z$ das *Argument*.



Wir berechnen nun das Ergebnis der Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polardarstellung.

$$\begin{aligned} (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cdot (r' \cos \vartheta', r' \sin \vartheta') &= (rr'(\cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta'), rr'(\sin \vartheta \cos \vartheta' + \cos \vartheta \sin \vartheta')) \\ &= (rr' \cos(\vartheta + \vartheta'), rr' \sin(\vartheta + \vartheta')). \end{aligned}$$

Die Multiplikation komplexer Zahlen entspricht also einer Multiplikation der Absolutbeträge und einer Addition der Argumente. Geometrisch ausgedrückt ist das eine *Drehstreckung* (siehe Abbildung).



Insbesondere ist die Multiplikation also kommutativ und assoziativ. Weiter ist $(1, 0)$ das neutrale Element ($r = 1, \vartheta = 0$) und das inverse Element ist gegeben durch

$$(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \cos(-\vartheta), \frac{1}{r} \cdot \sin(-\vartheta) \right) = (1, 0),$$

wobei $r > 0$. Die komplexen Zahlen ohne $(0, 0)$ bilden also mit der Multiplikation eine kommutative Gruppe. Das Distributivgesetz rechnet man auch leicht nach (Übung).

Für $a, a' \in \mathbb{R}$ gilt außerdem

$$(a, 0) \cdot (a', 0) = (aa', 0) \text{ und} \\ (a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0).$$

Dementsprechend identifizieren wir $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ mit \mathbb{R} und schreiben also $(a, 0) = a$. Die komplexe Zahl $(0, 1)$ heißt *imaginäre Einheit* und wird mit i bezeichnet. Für eine komplexe Zahl $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ bezeichnet man daher $\operatorname{Re} z := a$ auch als *Realteil* und $\operatorname{Im} z := b$ als *Imaginärteil*.

Es gilt $(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a)$, also

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib.$$

Außerdem gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2))^2 = (\cos(\pi), \sin(\pi)) = (-1, 0) = -1 \text{ und}$$

$$\begin{aligned} (a + ib) \cdot (a' + ib') &= aa' + aib' + bia' + ibib' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b). \end{aligned}$$

Dies erklärt auch nachträglich den Ursprung der Definition der Multiplikation.

Definition 13.2. Wir sagen dass eine Folge komplexer Zahlen $a_n + ib_n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ gegen $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ konvergiert, falls a_n gegen a und b_n gegen b konvergiert.

Eine Folge (a_n, b_n) heißt *beschränkt*, falls a_n, b_n beschränkte reelle Folgen sind.

Satz 13.3 (Heine-Borel in \mathbb{C}). *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (a_n, b_n) beschränkt. Dann sind die Folgen a_n, b_n beschränkt. Aus Heine-Borel für reelle Folgen¹⁵ erhalten wir eine konvergente Teilfolge a_{n_k} . Die Folge b_{n_k} ist auch beschränkt, also gibt es wieder nach Heine-Borel eine konvergente Teilfolge $b_{n_{k_m}}$. Teilfolgen konvergenter Folgen sind konvergent, also konvergiert auch $a_{n_{k_m}}$. \square

Eine Reihe von komplexen Zahlen heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert und man schreibt dann wie gewohnt

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^M a_m.$$

¹⁵Wir haben Heine-Borel nur für positive Folgen gezeigt, die reelle Version folgt jedoch durch Zerlegen in positiven und negativen Teil.

Potenzreihen. Sei $a_m \in \mathbb{X}$ eine Folge mit $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m < \infty$ für $0 \leq x < R$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M a_m (r \cos \vartheta + ir \sin \vartheta)^m &= \sum_{m=0}^M a_m (r^m \cos(m\vartheta) + ir^m \sin(m\vartheta)) \\ &= \sum_{m=0}^M a_m r^m \cos(m\vartheta) + i \sum_{m=0}^M a_m r^m \sin(m\vartheta). \end{aligned}$$

Die (reellen) Summen im letzten Ausdruck konvergieren absolut für $r < R$, da $|\cos(m\theta)| \leq 1$ und $|\sin(m\theta)| \leq 1$. Also konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

auch für komplexe z mit $|z| < R$. Das gleiche gilt für komplexe Koeffizienten a_m (Übung).

Satz 13.4. $\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ konvergiert, falls $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m| |z|^m < \infty$.

Es gilt $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$, usw. Daraus folgt für $b \in \mathbb{R}$

$$\exp(ib) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (ib)^m = f_0(b) + if_1(b) - f_2(b) - if_3(b) = \cos(b) + i \sin(b).$$

Insbesondere gilt die berühmte *Eulersche Formel*

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Durch Multiplikation von Potenzreihen sieht man auch

$$\exp(a + ib) = \exp(a) \exp(ib) = \exp(a) \cos(b) + i \exp(a) \sin(b).$$

Satz 13.5 (Dreiecksungleichung). Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| &\geq |z_1| - |z_2| \quad (\text{umgekehrte Dreiecksungleichung}) \end{aligned}$$

Beweis. Übung. □

Die Gleichung $x^2+1=0$ hat keine reelle Lösung, da das Quadrat einer reellen Zahl immer positiv ist. Man gelangt zu den komplexen Zahlen, indem man die Existenz einer Lösung postuliert und mit diesen „imaginären“ Größen so rechnet wie mit reellen Zahlen.

Die komplexen Zahlen sind nun in dem Sinne vollständig, dass jedes nicht-konstante Polynom eine Lösung besitzt.

Satz 13.6 (Hauptsatz der Algebra). *Für jedes Polynom $P(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^m$ mit $a_m \in \mathbb{C}$, $a_M \neq 0$, $M \geq 1$ gibt es $z_0 \in \mathbb{C}$ mit*

$$\sum_{m=0}^M a_m z_0^m = 0.$$

Beweis. Setze

$$R = \inf \left\{ \left| \sum_{m=0}^M a_m z^m \right| : z \in \mathbb{C} \right\} \in \mathbb{X}.$$

Nach Definition des Infimum gibt es eine Folge z_n mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=0}^M a_m z_n^m \right| = R. \quad (53)$$

Behauptung. Die Folge z_n ist beschränkt.

Beweis der Behauptung. Falls $|z| > 1$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=0}^M a_m z^m \right| &\geq |a_M z^M| - \left| \sum_{m=0}^{M-1} a_m z^m \right| \geq |a_M| |z|^M - \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| |z|^{M-1} \\ &= |z|^{M-1} \left(|a_M| |z| - \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| \right) \\ &\geq |a_M| |z| - \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| \geq R + 1 \end{aligned}$$

für $|z|$ groß genug. □

Der Satz von Heine-Borel liefert uns also eine konvergente Teilfolge, die wir aus Bequemlichkeit wieder z_n nennen wollen. Sei $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Behauptung.

$$\left| \sum_{m=0}^M a_m z_0^m \right| = R.$$

Beweis der Behauptung. Das folgt aus (53) und Stetigkeit (Übung). \square

Nun genügt es zu zeigen, dass $R = 0$. Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass $\sum_{m=0}^M a_m z_0^m \neq 0$. Wenn wir das Polynom verschieben ($\tilde{P}(z) = P(z - z_0)$), ändert das nichts an der Existenz einer Nullstelle. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $z_0 = 0$. Dann ist $a_0 = R e^{i\vartheta}$. Wenn wir das Polynom mit $e^{-i\vartheta}$ multiplizieren, ändern wir nichts an den Nullstellen. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a_0 = R > 0$. Sei $k > 0$ nun der kleinste Index mit $a_k \neq 0$ (existiert, da $a_M \neq 0$). Dann gilt

$$P(z) = R + \sum_{m=k}^M a_m z^m.$$

Sei $a_k = r' e^{i\vartheta'}$. Indem wir das Polynom drehen ($\tilde{P}(z) = P\left(z e^{i\frac{\pi-\vartheta'}{k}}\right)$) ändern wir nichts an der Anzahl der Nullstellen. Also können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a_k = r' > 0$. Also haben wir

$$|P(z)| = \left| R - r' z^k + \sum_{m=k+1}^M a_m z^m \right| < R$$

für $|z|$ klein genug. Widerspruch! \square

◇————— Ende Vorlesung 22, 18.12.2014 —————◇

Wir haben schon einige Regeln der Differentialrechnung aufgezeigt: sind f, g differenzierbar an der Stelle x , so sind auch

$$f + g, f \cdot g \tag{54}$$

differenzierbar an der Stelle x und

$$(f + g)' = f' + g', \text{ sowie} \tag{55}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \text{ Produkt/Leibniz-Regel.} \tag{56}$$

Ähnliche Regeln gelten auch für analytische Funktionen: sind f, g reell analytisch an der Stelle x , so sind

$$f + g, f \cdot g \tag{57}$$

auch reell analytisch an der Stelle x .

Wir erinnern daran, dass f analytisch an der Stelle $x = 0$ heißt, falls es eine Potenzreihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ mit einem Konvergenzradius $r > 0$ gibt, sodass

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \text{ für } |x| < r. \quad (58)$$

Sind

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m, \quad (59)$$

analytische Funktionen mit Konvergenzradius r_1 bzw. r_2 , dann gilt

$$(f + g)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m) x^m \text{ mit Konvergenzradius } \min\{r_1, r_2\}, \quad (60)$$

und

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m a_n b_{m-n} \right) x^m \text{ mit Konvergenzradius } \min\{r_1, r_2\}. \quad (61)$$

Für $m = 1$ ist der Koeffizient in in (61) gleich $a_1 b_0 + a_0 b_1$, was an die Produktregel erinnert.

Anschließend stellen wir die Formel der Ableitung des Kehrwerts einer Funktion vor: ist f differenzierbar an der Stelle x und $f(x) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{f}$ differenzierbar an der Stelle x mit

$$\left(\frac{1}{f} \right)' (x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}. \quad (62)$$

Satz 13.7. Sei $x \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und D enthalte ein Intervall (a, b) mit $x \in (a, b)$. Sei $m \in \mathbb{C}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(x) \neq 0$. Falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass $\forall y \in D, y \neq x, |y - x| < \delta$:

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - m \right| < \varepsilon, \quad (63)$$

dann gilt $\forall \bar{\varepsilon} > 0, \exists \bar{\delta} > 0, \forall y \in D, y \neq x, |y - x| < \bar{\delta}$:

$$f(y) \neq 0 \wedge \left| \frac{\frac{1}{f(y)} - \frac{1}{f(x)}}{y - x} - \left(-\frac{m}{f^2(x)} \right) \right| < \bar{\varepsilon}. \quad (64)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $f(y) \neq 0$ für y mit $|y - x|$ klein genug. Nach Definition gibt es δ_0 , sodass für alle y mit $|y - x| < \delta_0$ gilt:

$$|f(y) - f(x) - m(y - x)| \leq |y - x|. \quad (65)$$

Daraus folgt

$$|f(y) - f(x)| \leq (|m| + 1)|y - x|. \quad (66)$$

Wenn δ_0 klein genug ist, dann stellt (66) sicher, dass

$$|f(y)| \geq \frac{|f(x)|}{2} > 0. \quad (67)$$

Zum zweiten Teil der Behauptung:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\frac{1}{f(y)} - \frac{1}{f(x)}}{y - x} + \frac{m}{f^2(x)} \right| \\ & \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{(y - x)f(y)f(x)} + \frac{m}{f(x)f(y)} \right| + \left| \frac{m}{f(x)f(y)} - \frac{m}{f^2(x)} \right| \\ & \leq \frac{1}{|f(x)|} \frac{1}{|f(y)|} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - m \right| + \left| \frac{m}{f(x)} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right) \right| \\ & \leq \frac{2\varepsilon}{|f(x)|^2} + \frac{2m}{|f(x)|^3} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| |y - x| \\ & \leq \frac{2\varepsilon}{|f(x)|^2} + \frac{2m}{|f(x)|^3} (m + \varepsilon) \cdot \bar{\delta}. \end{aligned} \quad (68)$$

Sei $\bar{\varepsilon}$ gegeben. Wähle zunächst ε , sodass

$$\frac{2\varepsilon}{|f(x)|^2} < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}. \quad (69)$$

Dann wähle δ nach (63) und sei $\bar{\delta}$ so klein, dass $\bar{\delta} < \delta$ und

$$\forall |y - x| < \bar{\delta} : |f(y)| \geq \frac{|f(x)|}{2}, \quad (70)$$

und

$$\frac{2m}{|f(x)|^3} (|m| + \varepsilon) \cdot \bar{\delta} < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}. \quad (71)$$

Dann gilt (68) $< \bar{\varepsilon}$.

□

Satz 13.8. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ reell analytisch bei 0, $f(0) \neq 0$, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_0 \neq 0. \quad (72)$$

Dann existiert eine bei 0 reell analytische Funktion g , sodass $f \cdot g \equiv 1$ auf $(-r, r)$ für ein $r > 0$ gilt.

Beweis. Wir machen den folgenden Ansatz:

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m. \quad (73)$$

Dann muss

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m b_{n-m} x^n \equiv 1. \quad (74)$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung steht jeweils eine Potenzreihe. Wir vergleichen die Koeffizienten dieser Potenzreihen:

$$\begin{aligned} n = 0 : a_0 b_0 &= 1, \\ n > 0 : a_0 b_n + \sum_{m=1}^n a_m b_{n-m} &= 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Daraus folgt

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, b_n = -\frac{1}{a_0} \left(\sum_{m=1}^n a_m b_{n-m} \right). \quad (76)$$

Es bleibt noch einen positiven Konvergenzradius r nachzuweisen. Man sieht leicht, dass

$$\exists r > 0 : \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| r^m < |a_0|. \quad (77)$$

Behauptung. Für alle n gilt

$$|b_n| r^n \leq \frac{1}{|a_0|}. \quad (78)$$

Die Behauptung impliziert, dass $r/2$ ein Konvergenzradius ist.

Beweis der Behauptung: Induktion nach n . Für $n = 0$ gilt

$$|b_0| = \frac{1}{|a_0|}. \quad (79)$$

Für $n > 0$ gilt nach (76),

$$\begin{aligned}
|b_n|r^n &\leq \frac{1}{|a_0|} \left| \sum_{m=1}^n a_m b_{n-m} \right| r^n \\
&\leq \frac{1}{|a_0|} \sum_{m=1}^n |a_m| r^m |b_{n-m}| r^{n-m} \\
&\leq \frac{1}{|a_0|} \frac{1}{|a_0|} \sum_{m=1}^n |a_m| r^m \leq \frac{1}{|a_0|}.
\end{aligned} \tag{80}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Man bemerke wieder, dass der erste Koeffizient $b_1 = -\frac{a_1}{a_0}$ genau der Formel (62) entspricht.

Definition 13.9. Sei $n \geq 0$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{m=-n}^{\infty} b_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_{m-n} x^{m-n} = \frac{1}{x^n} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \tag{81}$$

wobei $b_m = a_{m-n}$, heißt *Laurentreihe*.

Die Konvergenztheorie für Laurentreihen ist die Gleiche wie für Potenzreihen.

Satz 13.10. *Ist f reell analytisch bei 0 und ist die Taylorreihe bei 0 nicht konstant gleich 0, so gibt es eine Laurentreihe g mit einem positiven Konvergenzradius $r > 0$, sodass*

$$f(x)g(x) = 1, \forall x \neq 0, |x| < r. \tag{82}$$

Beweis. Sei $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$. Wir wählen n so, dass

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1} = 0, a_n \neq 0. \tag{83}$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{m=n}^{\infty} a_m x^m = x^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n+m} x^m \right). \tag{84}$$

Wir schreiben

$$g(x) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{n+m} x^m. \tag{85}$$

Dann ist g eine Potenzreihe und $g(0) \neq 0$. Daher gilt

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{g(x)}, \quad (86)$$

wobei $1/g(x)$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ist. \square

Der obige Satz impliziert, dass wenn $f(0) = 0$ und die Taylorreihe von f nicht konstant gleich 0 ist, dann 0 eine isolierte Nullstelle von f sein muss, d.h. es gilt

$$\exists r > 0 \text{ mit } f(x) \neq 0, \forall |x| < r, x \neq 0. \quad (87)$$

◇ ————— Ende Vorlesung 23, 13.01.2015 ————— ◇

Sei f differenzierbar bei x , $f(x) \neq 0$ und $g = \frac{1}{f}$. Dann gilt

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}. \quad (88)$$

Zum Beispiel sei $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$. Dann ist

$$f'(x) = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}. \quad (89)$$

Sei $n \geq 1$. Eine Laurentreihe ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{m=-n}^{\infty} a_m x^m = \underbrace{\sum_{m=-n}^{-1} a_m x^m}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m}_{\text{Potenzreihe}}. \quad (90)$$

Sei r der Konvergenzradius dieser Potenzreihe. Dann gilt für $0 < |x| < r$:

$$f'(x) = \sum_{m=-n}^{\infty} m \cdot a_m x^{m-1}. \quad (91)$$

Die Stammfunktion von f ist formal gegeben durch

$$g(x) = \sum_{m=-n}^{\infty} \frac{1}{m+1} \cdot a_m x^{m+1}. \quad (92)$$

Das Problem ist, dass wenn $m = -1$ ist, der Koeffizient $\frac{1}{m+1}$ nicht wohldefiniert ist. Falls $a_{-1} = 0$, dann ist eine Stammfunktion von f gegeben durch

$$g(x) = \sum_{m=-n, m \neq -1}^{\infty} \frac{1}{m+1} a_m x^{m+1}. \quad (93)$$

Definition 13.11. Der Koeffizient a_{-1} einer Laurentreihe $f(x) = \sum_{m=-n}^{\infty} a_m x^m$ heißt das *Residuum* von f . Wir schreiben $\text{Res}(f) = a_{-1}$.

Um zu zeigen, dass das Residuum wohldefiniert ist brauchen wir den folgenden Satz.

Satz 13.12. *Seien*

$$f(x) = \sum_{m=-n}^{\infty} a_m x^m, g(x) = \sum_{m=-k}^{\infty} b_m x^m \quad (94)$$

zwei Laurentreihen mit Konvergenzradius $r > 0$. Es gelte $f(x) = g(x)$ für alle x mit $0 < |x| < r$ und $a_{-n} \neq 0, b_{-k} \neq 0$. Dann folgt

$$n = k \text{ und } a_m = b_m \text{ für alle } m \geq -n. \quad (95)$$

Beweis. Setze

$$\tilde{f}(x) = x^{n+k} f(x), \tilde{g}(x) = x^{n+k} g(x). \quad (96)$$

Dann sind \tilde{f} und \tilde{g} Potenzreihen und es gilt

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x), \forall 0 < |x| < r. \quad (97)$$

Also haben \tilde{f} und \tilde{g} die gleichen Koeffizienten. \square

Um eine Laurentreihe $\sum_{m=-n}^{\infty} a_m x^m$ zu multiplizieren, schreiben wir zuerst

$$\sum_{m=-n}^{\infty} a_m x^m = x^{-n} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+n} x^m, \quad (98)$$

und verwenden dann das bekannte Produkt von Potenzreihen.

Satz 13.13. *Sei f eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{Z}$:*

$$\text{Res}(f^n \cdot f') = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = -1, \\ 0, & \text{falls } n \neq -1. \end{cases} \quad (99)$$

Beweis. Fall $n = -1$. Schreibe $f(x) = x \cdot g(x)$, wobei g eine Potenzreihe mit $g(0) \neq 0$ ist. Dann ist

$$f^{-1} f' = \frac{f'}{f} = \frac{g(x) + x \cdot g'(x)}{x \cdot g(x)} = \frac{1}{x} + \underbrace{\frac{g'}{g}}_{\text{Potenzreihe}}. \quad (100)$$

Daher ist das Residuum gleich 1.

Fall $n \geq 0$. Dann ist $f^n \cdot f'$ eine Potenzreihe. Daher folgt $\text{Res}(f^n \cdot f') = 0$.

Fall $n \leq -2$. Setze $g = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$. Dann ist $g' = f^n \cdot f'$. Da $f(0) = 0$, folgt $\text{Res}(g') = 0$.

□

Kettenregel. Ist g differenzierbar an der Stelle x und f differenzierbar an der Stelle $g(x)$, $h = f \circ g$, d.h. $h(y) = f(g(y))$, dann ist h differenzierbar an der Stelle x und es gilt

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (101)$$

Beispiel. Sei $f(y) = y^n$. Dann ist

$$(f \circ g)' = n \cdot g^{n-1}(x) \cdot g'(x). \quad (102)$$

Satz 13.14. Sei $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{C}$, $x \in (a, b)$ und $g(x) \in (c, d)$. Falls für $m \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in (a, b), y \neq x, |y - x| < \delta$ gilt

$$\left| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} - m \right| < \varepsilon, \quad (103)$$

und für $n \in \mathbb{C}$, $\forall \bar{\varepsilon} > 0, \exists \bar{\delta} > 0, \forall z \in (c, d), z \neq g(x), |z - g(x)| < \bar{\delta}$ gilt

$$\left| \frac{f(z) - f(g(x))}{z - g(x)} - n \right| < \bar{\varepsilon}, \quad (104)$$

dann gilt $\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta} > 0, \forall y \in (a, b), y \neq x, |y - x| < \tilde{\delta}$,

$$\left| \frac{f(g(y)) - f(g(x))}{y - x} - m \cdot n \right| < \tilde{\varepsilon}. \quad (105)$$

Beweis. Sei $\tilde{\varepsilon}$ gegeben und wähle ε mit $|n| \cdot \varepsilon < \tilde{\varepsilon}/2$. Wähle $\bar{\varepsilon}$ mit $(|m| + \varepsilon)\bar{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}/2$. Seien $\delta, \bar{\delta}$ gewählt nach (103) und (104). Sei $\tilde{\delta}$ klein genug mit

$$(|m| + \varepsilon + 1)\tilde{\delta} \leq \bar{\delta}. \quad (106)$$

Für y mit $|y - x| \leq \tilde{\delta}$ gilt

$$|g(y) - g(x)| = |m||y - x| + \varepsilon|y - x| \leq (|m| + \varepsilon)\tilde{\delta} \leq \bar{\delta}. \quad (107)$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(g(y)) - f(g(x))}{y - x} - m \cdot n \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{y - x} (n \cdot (g(y) - g(x))) - mn \right| + \left| \frac{1}{y - x} \bar{\varepsilon} (g(x) - g(y)) \right| \\ & \leq |n|\varepsilon + (|m| + \varepsilon)\bar{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (108)$$

□

Beispiel. Es gilt $e^{\ln(x)} = x$. Sei

$$f(x) = e^x, g(y) = \ln y. \quad (109)$$

Also gilt $x = (f \circ g)(x)$. Daraus folgt mit der Kettenregel

$$1 = f'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = x \cdot g'(x), \quad (110)$$

also gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}. \quad (111)$$

Satz 13.15. Sind f, g reell analytisch bei 0 und $g(0) = 0$, dann ist $f \circ g$ reell analytisch bei 0.

Beweis. Seien

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m. \quad (112)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass Konvergenzradius von f und g größer als 1 sind (sonst ersetze $g(x)$ durch $g(c \cdot x)$ für geeignetes c). Desweiteren nehmen wir an, dass alle Koeffizienten von f und g kleiner als 1 sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (g(x))^n \\ &= a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\sum_{m_1+\dots+m_n=k; 1 \leq m_j \leq k} b_{m_1} \dots b_{m_n} \right) x^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^k \sum_{m_1+\dots+m_n=k} a_n b_{m_1} \dots b_{m_n} \right)}_{\leq \sum_{n=1}^k \sum_{m_1+\dots+m_n=k} 1 \leq 2^k} x^k. \end{aligned} \quad (113)$$

Daher ist der Konvergenzradius nicht kleiner als $1/2$. \square

Satz 13.16 (Langrange's Inversionstheorem). Sei g reell analytisch bei 0, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Setze

$$b_n = \frac{1}{n} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{g^n} \right). \quad (114)$$

Dann hat

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad (115)$$

einen positiven Konvergenzradius ε und es gilt $(f \circ g)(x) = x$ für alle $0 < |x| < \varepsilon$.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{(f \circ g)'}{g^n}\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{g^n} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_k \cdot g^{k-1} g'\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_k \cdot \operatorname{Res}(g^{k-n-1} g') \\ &= n \cdot b_n = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{g^n}\right).\end{aligned}\tag{116}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{(f \circ g)' - 1}{g^n}\right) = 0.\tag{117}$$

Per Induktion nach n kann man zeigen, dass alle Koeffizienten von $(f \circ g)' - 1$ gleich null sind. Daher gilt $(f \circ g)' = 1$, d.h. $(f \circ g)(x) = x$. (Fortsetzung folgt.) \square

◇————— Ende Vorlesung 24, 15.01.2015 —————◇

Sei $f(x) = e^x - 1$. Wir möchten die Gleichung

$$e^y - 1 = x\tag{118}$$

lösen, wobei $x > -1$. Zuerst schreiben wir

$$e^y = x + 1.\tag{119}$$

Dann ist

$$y = \ln(x + 1).\tag{120}$$

Setzen wir (120) in (119) ein, erhalten wir

$$e^{\ln(x+1)} = x + 1.\tag{121}$$

Wir bilden auf beiden Seiten die Ableitung:

$$\ln'(x + 1)e^{\ln(x+1)} = 1.\tag{122}$$

Daraus folgt:

$$\ln'(x + 1) = \frac{1}{x + 1}.\tag{123}$$

Schreibe $1/(x+1)$ als geometrische Reihe:

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n, \text{ für } |x| < 1. \quad (124)$$

Bilde auf beiden Seiten die Stammfunktion:

$$\ln(x+1) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^n x^{n+1}, \text{ für } |x| < 1. \quad (125)$$

In (125) gilt $c = 0$, da $\ln(1) = 0$. Aus der obigen Gleichung folgt

$$\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^n x^{n+1}\right) = 1+x. \quad (126)$$

Diese Gleichung gilt auch für komplexe x mit $|x| < 1$. Daher können wir in (126) x durch ix ersetzen und erhalten für $|x| < 1$

$$\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^n i^n x^{n+1}\right) = 1+ix. \quad (127)$$

Wir wissen auch, dass

$$e^{\ln|1+ix|+i\arctan x} = 1+ix. \quad (128)$$

Vergleichen wir die Realteile der linken Seiten von (127) und (128), erhalten wir

$$\ln\sqrt{1+x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (-x^2)^n, \quad (129)$$

oder äquivalent

$$\ln(1+x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-x^2)^n. \quad (130)$$

Das ist genau die vorherige Formel (125) mit x^2 anstelle von x .

Vergleichen wir die Imaginärteile der linken Seiten von (127) und (128), erhalten wir

$$\begin{aligned} i\arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} i^{2n+1} x^{2n+1} \\ &= i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^n x^{2n+1}. \end{aligned} \quad (131)$$

Wir bilden auf beiden Seiten die Ableitung:

$$\arctan'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}. \quad (132)$$

Übung. Zeige, dass

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (133)$$

Man beachte dabei den Konvergenzradius der Reihe $\ln(1+x)$.

Übung. Zeigen, dass

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (134)$$

Wir erinnern daran, dass eine Laurentreihe durch

$$\sum_{n=-N}^{-1} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (135)$$

gegeben ist. Verschieben wir diese Laurentreihe in den Punkt x_0 :

$$\sum_{n=-N}^{-1} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n. \quad (136)$$

Bilde die Stammfunktion:

$$\sum_{n=-N}^{-2} \frac{1}{n+1} b_n (x-x_0)^{n+1} + b_{-1} \ln(|x-x_0|) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} b_n (x-x_0)^{n+1}. \quad (137)$$

Definition 13.17. Ein *Polynom* p vom Grad d ist gegeben durch

$$p = \sum_{m=0}^d a_m x^m, \text{ mit } a_d \neq 0, a_m \in \mathbb{C}. \quad (138)$$

Wir schreiben $\deg(p) = d$. Man beachte, dass diese Definition den Fall $p \equiv 0$ ausschließt. Aus Bequemlichkeit betrachten wir die Nullfunktion jedoch oft auch als Polynom. Es kommt außerdem oft gelegen, den Grad des Nullpolynoms als $-\infty$ zu definieren. Wir werden im Folgenden nicht weiter auf sich aus der Existenz dieses Ausnahmefalles ergebende Notationsschwierigkeiten eingehen.

Entwicklung eines Polynoms an der Stelle x_0 :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^d a_m ((x - x_0) + x_0)^m &= \sum_{m=0}^d a_m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x - x_0)^k x_0^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^d \left[\sum_{m=k}^d a_m \binom{m}{k} x_0^{m-k} \right] (x - x_0)^k. \end{aligned} \quad (139)$$

Dies kann als ein Polynom in $(x - x_0)$ interpretiert werden. Der Grad des neuen Polynoms ist wieder d , da der höchste Koeffizient wieder a_d ist.

Satz 13.18. *Ist p ein Polynom vom Grad d und ist $p(x_0) = 0$, so gibt es ein Polynom \tilde{p} vom Grad $d - 1$ mit*

$$p(x) = (x - x_0)\tilde{p}(x). \quad (140)$$

Beweis. Falls $x_0 = 0$, dann

$$p(x) = \sum_{m=0}^d a_m x^m \text{ mit } p(0) = a_0 = 0. \quad (141)$$

Daraus folgt

$$p(x) = x \left(\underbrace{\sum_{m=0}^{d-1} a_{m+1} x^m}_{\tilde{p}} \right). \quad (142)$$

Falls $x_0 \neq 0$, nehmen wir die Entwicklung von p an der Stelle x_0 zur Hand und führen das gleiche Argument durch. \square

Satz 13.19. *Ein Polynom vom Grad d hat höchstens d Nullstellen.*

Beweis. Induktion nach d . Falls $d = 0$, dann ist $p(x) = a_0 \neq 0$ und es gibt keine Nullstellen. Wir nehmen an, dass alle Polynome vom Grad d höchstens d Nullstellen haben (Induktionsannahme). Sei p ein Polynom mit $\deg(p) = d + 1$. Falls p mindestens eine Nullstelle x_0 hat, gilt nach Satz 13.18,

$$p(x) = (x - x_0)\tilde{p}(x), \quad (143)$$

wobei \tilde{p} ein Polynom von Grad d ist. Also hat p höchstens $d + 1$ Nullstellen. \square

Satz 13.20. Ist p ein Polynom vom Grad d , so gibt es

$$d_1, d_2, \dots, d_M \in \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{m=1}^M d_m = d \quad (144)$$

und paarweise verschiedene

$$x_1, x_2, \dots, x_M \in \mathbb{C}, \quad (145)$$

sowie $c \in \mathbb{C}$, sodass

$$p(x) = c \prod_{m=1}^M (x - x_m)^{d_m}. \quad (146)$$

Beweis. Nach Hauptsatz der Algebra hat jedes nicht-konstante Polynom mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} . Also brauchen wir nur induktiv den Satz 13.18 anzuwenden. \square

Definition 13.21. Eine *rationale Funktion* r ist gegeben durch

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (147)$$

wobei p, q zwei Polynome sind, die keine Nullstellen gemeinsam haben und $q \neq 0$. Wir definieren

$$\deg(r) := \max\{\deg(p), \deg(q)\}. \quad (148)$$

Satz 13.22. Ist $\frac{p}{q}$ eine rationale Funktion, so gibt es Polynome \tilde{p} und S mit $\deg(\tilde{p}) < \deg(q)$ so dass

$$\frac{p}{q} = \frac{\tilde{p}}{q} + S. \quad (149)$$

Beweis. Induktion nach $\deg(p)$. Falls $\deg(p) < \deg(q)$, dann setzen wir $\tilde{p} = p$ und $S = 0$. Falls $\deg(p) \geq \deg(q)$, dann sei

$$p(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n, q(x) = \sum_{m=0}^M b_m x^m. \quad (150)$$

Wir schreiben

$$p = \underbrace{p - \frac{a_N}{b_M} x^{N-M} q}_{\text{Polynom von Grad } \leq N-1} + \underbrace{\frac{a_N}{b_M} x^{N-M} q}_{\text{Polynom}}. \quad (151)$$

Teilen wir durch q , so steht die gewünschte Zerlegung da. \square

Satz 13.23. Ist $\frac{p}{q}$ eine rationale Funktion mit $\deg(q) < \deg(p)$ und

$$q = c \prod_{m=1}^M (x - x_m)^{d_m}. \quad (152)$$

Definiere

$$\tilde{q} = c \prod_{m=2}^M (x - x_m)^{d_m}, \quad (153)$$

Dann existieren $b_k \in \mathbb{C}$ und Polynom \tilde{p} mit $\deg(\tilde{p}) < \deg(\tilde{q})$ so dass

$$\frac{p}{q} = \sum_{k=-d_1}^{-1} b_k (x - x_1)^k + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}. \quad (154)$$

Beweis. Durch Verschieben können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_1 = 0$. Dann ist $\frac{p}{q}$ reell analytisch bei $x = 0$. Deshalb ist $\frac{1}{x^{d_1}} \frac{p}{q}$ eine Laurentreihe bei $x = 0$, also gilt

$$\frac{1}{x^{d_1}} \frac{p}{q} = \sum_{k=-d_1}^{-1} b_k x^k + f, \quad (155)$$

wobei f eine analytische Funktion bei $x = 0$ ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$p = \underbrace{\sum_{k=-d_1}^{-1} b_k x^k \cdot q}_{\text{Polynom von Grad } \leq \deg(p)} + \underbrace{f \cdot q}_{\text{auch ein Polynom}}. \quad (156)$$

Also definieren wir

$$\tilde{p} := \frac{f \cdot q}{x^{d_1}}. \quad (157)$$

Es ist einfach zu sehen, dass $\deg(\tilde{p}) < \deg(\tilde{q})$. □

Ende Vorlesung 25, 20.01.2015

Satz 13.24. Ist $\frac{p}{q}$ eine rationale Funktion mit komplexen Koeffizienten, dann gilt

$$\frac{p}{q} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} + i \frac{\tilde{\tilde{p}}}{\tilde{\tilde{q}}}$$

für geeignete Polynome $\tilde{p}, \tilde{\tilde{p}}, \tilde{q}, \tilde{\tilde{q}}$ mit reellen Koeffizienten.

Beweis. Sei $p = a + ib$, $q = c + id$, wobei a, b, c, d Polynome mit reellen Koeffizienten sind. Dann gilt

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

□

Satz 13.25 (Partialbruchzerlegung). *Ist f eine rationale Funktion mit $\deg(p) < \deg(q)$, dann gilt*

$$\frac{p}{q} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=-d_m}^{-1} b_{k,m} (x - x_m)^{d_m}$$

für passende natürliche Zahlen m, M, d_1, \dots, d_m und Koeffizienten $b_{k,m} \in \mathbb{C}$. Ist dagegen $\deg(p) \geq \deg(q)$, dann ist

$$\frac{p}{q} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=-d_m}^{-1} b_{k,m} (x - x_m)^{d_m} + c + \sum_{k=1}^K b_{k,\infty} x^k$$

für passende natürliche Zahlen m, M, K, d_1, \dots, d_m und $b_{k,m}, b_{k,\infty} \in \mathbb{C}$. Der Term $\sum_{k=1}^K b_{k,\infty} x^k$ heißt der Hauptteil bei ∞ .

Der Beweis folgt durch Induktion aus Satz 13.23.

Die Partialbruchzerlegung erlaubt uns, Stammfunktionen von rationalen Funktionen zu finden.

Sei $f(x) = \left(\frac{1}{x-x_m}\right)^k$. Dann ist

$$f'(x) = -k(x - x_m)^{-k-1}$$

Sei $x_m = a + ib$. Falls $a > 0$, sei

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln((x - a)^2 + b^2) + i \arctan \frac{-b}{x - a}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(x - a)^2 + b^2} 2(x - a) + i \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{x-a}\right)^2} \frac{b}{(x - a)^2} \\ &= \frac{(x - a) + ib}{b^2 + (x - a)^2} = \frac{1}{(x - a) - ib} = \frac{1}{x - x_m}. \end{aligned}$$

Für $b \neq 0$ sei

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + b^2) + i \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{g}'(x) &= \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2} + i \frac{b}{1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \frac{1}{b^2} \\ &= \frac{x-a + ib}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{1}{x - x_m}. \end{aligned}$$

14 Integrationstechniken

Satz 14.1 (Substitutionsregel). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Außerdem sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Man beachte insbesondere, dass es nicht notwendig ist, dass φ injektiv oder gar bijektiv ist.

Satz 14.2 (Partielle Integration). *Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Dabei ist $f(x)g(x)|_a^b$ eine abkürzende Schreibweise für $f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Beweis. Dies folgt aus der Produktregel und dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung. Die Details bleiben dem Leser überlassen. \square

Beide Sätze gelten auch unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen an die jeweils beteiligten Funktionen. Dann werden die Beweise jedoch entsprechend aufwendiger.

Beweis der Substitutionsregel. Sei F eine Stammfunktion von f , d.h. $F' = f$. Für $F \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt nach Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Daraus folgt nach Hauptsatz der Infinitesimalrechnung:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.\end{aligned}$$

□

Beispiele. Im Folgenden seien die beteiligten Funktionen stets so gewählt, dass sie die Voraussetzungen der obigen Sätze erfüllen.

(B1) Aus der Substitutionsregel folgt die folgende Regel zur Integration verschobener Funktionen:

$$\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t)dt.$$

Hier ist $\varphi(t) = t + c$, also $\varphi'(t) = 1$.

(B2) Sei $c \neq 0$ eine Konstante. Das Integral einer um den Faktor c gestauchten bzw. gestreckten Funktion ist gegeben durch

$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(t)dt.$$

Dabei ist $\varphi(t) = ct$ und daher $\varphi'(t) = c$.

(B3) Wir können die Substitution auch mit einer nicht-injektiven Funktion durchführen, z.B. $\varphi(t) = t^2$. Es gilt

$$\int_a^b tf(t^2)dt = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} f(x)dx.$$

(B4) Sei $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Mit $\varphi(t) = \sin(t)$, $f(x) = 1/x$ gilt dann

$$\begin{aligned}\int_a^b \tan(t)dt &= \int_a^b \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt = - \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt = - \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= - \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{x} dx = - \ln(x) \Big|_{\cos(a)}^{\cos(b)} = \ln \left(\frac{\cos(a)}{\cos(b)} \right).\end{aligned}$$

(B5) Sei $0 < a < b < \infty$. Durch partielle Integration können wir den Logarithmus integrieren. Sei $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = x$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln(x) dx &= \int_a^b f(x)g'(x) dx = x \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b (\ln(x))' x dx \\ &= b \ln(b) - a \ln(a) - \int_a^b 1 dx = b \ln(b) - a \ln(a) - b + a. \end{aligned}$$

(B6) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 2\pi, & n = m = 0, \\ \pi, & n = m \neq 0, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Eine Interpretation dieser Gleichung ist, dass die Funktionen $\{\cos(nx)\}$ *orthogonal* zueinander sind. Dies wird an späterer Stelle noch eine Rolle spielen. Der Beweis erfolgt durch zweimalige partielle Integration.

(B7) Partielle Integration erlaubt auch die Auswertung des *Wallis'schen Integrals*:

$$W_n := \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

Diese Formel hat verschiedene Anwendungen. Wir geben drei Beispiele.

- (Stirling'sche Formel) Es gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

wobei $a_n \sim b_n$ bedeutet, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Wenn wir bereits wissen, dass

$$n! \sim \sqrt{Cn} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

gilt, dann können wir mithilfe des Wallis'schen Integrals zeigen, dass $C = 2\pi$ ist.

- (Beta-Funktion) Seien $x, y > 0$. Die *Beta-Funktion* ist definiert als

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

wobei $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ die Gamma-Funktion bezeichnet. Es gilt die Formel

$$W_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

- (Gauss'sches Integral) Es gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

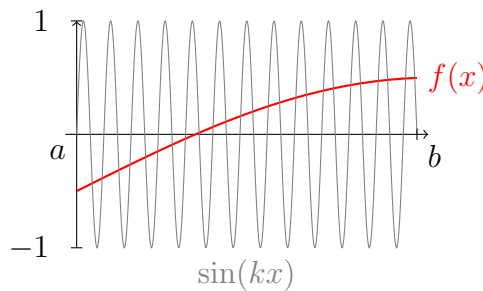
Wir besprechen noch eine weitere Anwendung der partiellen Integration.

Lemma 14.3 (Riemann-Lebesgue). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere*

$$F(k) = \int_a^b f(x) \sin(kx) dx.$$

Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 0$.

Die Aussage des Riemann-Lebesgue Lemmas lässt sich gut anhand eines Bildes illustrieren.



Für größer werdendes k oszilliert die Funktion $\sin(kx)$ immer schneller im Vergleich zur Funktion f , die über eine Sinusperiode hinweg für sehr großes k annähernd konstant ist und im Integral somit zunehmend verschwindet.

Beweis des Lemmas. Für $k \neq 0$ ergibt sich durch partielle Integration

$$F(k) = -f(x) \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_a^b - \frac{1}{k} \int_a^b f'(x) \cos(kx) dx.$$

Da f, f' auf $[a, b]$ stetig sind, existiert ein $0 < M < \infty$ mit

$$|f(x)| \leq M, \quad |f'(x)| \leq M, \quad x \in [a, b].$$

Es folgt

$$|F(k)| \leq \frac{2M}{k} + \frac{M(b-a)}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

□

Anwendung. Mit dem Riemann-Lebesgue Lemma lässt sich die folgende Formel beweisen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \text{ für } x \in (0, 2\pi).$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ folgt daraus die *Leibniz-Formel*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

◇ ————— Ende Vorlesung 26, 22.01.2015 ————— ◇

15 Metrische Räume

Definition 15.1. Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{X}$ mit den Eigenschaften

1. $\forall x \in X, \forall y \in X : d(x, y) = d(y, x)$, (Symmetrie)
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$, (Definitheit)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$. (Dreiecksungleichung)

Beispiel. 1. $X = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$.

2. $X = \mathbb{C}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ oder $d(a + ib, c + id) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$.

Bemerkung. Gibt es auf X eine additive Struktur (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Auslöschungsgesetz und Einheitselement), dann verlangt man oft Verträglichkeit

$$d(x, y) = d(x + z, y + z). \tag{158}$$

Hat X zusätzlich additive Inverse, so ist

$$d(x, y) = d(x - y, 0) =: |x - y|. \tag{159}$$

Man kann also die Abstandsfunktion in diesem Fall mithilfe einer Betragsfunktion ausdrücken, wie schon in den obigen Beispielen gesehen. Die metrischen Eigenschaften formalisieren sich dann für $|\cdot|$ wie folgt

1. $|x| = |-x|$.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$.

$$3. |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Definition 15.2. Eine Folge $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ heißt *konvergent gegen* $a \in X$, falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0. \quad (160)$$

Satz 15.3. *Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Seien $a, b \in X$ mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0 \quad (161)$$

und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, b) = 0. \quad (162)$$

Dann gilt für alle n ,

$$d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(b, x_n). \quad (163)$$

Durch Anwenden von \limsup auf beiden Seiten erhalten wir $d(a, b) = 0$. \square

Beispiel. $X = \mathbb{X}$ mit $d(x, y) = |x - y|$. Auf X haben wir nun im Prinzip zwei Konvergenzbegriffe definiert. Der alte Konvergenzbegriff war

$$\limsup x_n \leq a \leq \liminf x_n. \quad (164)$$

Der neue Konvergenzbegriff ist

$$\limsup |x_n - a| = 0. \quad (165)$$

Beide sind aber äquivalent, da man leicht sieht dass beide äquivalent sind zu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \forall m > n : a < x_n + \varepsilon \wedge x_n < a + \varepsilon.$$

Satz 15.4. *Falls $\{x_n\}$ gegen a konvergiert und $\{y_n\}$ gegen b , dann konvergiert $d(x_n, y_n)$ gegen $d(a, b)$.*

Beweis. Wir zeigen die zwei Ungleichungen von (164). Zuerst,

$$\limsup d(x_n, y_n) \leq \limsup (d(x_n, a) + d(a, b) + d(b, y_n)) \leq d(a, b). \quad (166)$$

Für die andere Ungleichung, beobachte dass für alle n :

$$d(a, b) \leq d(x_n, y_n) + d(x_n, a) + d(b, y_n). \quad (167)$$

Für alle m und $n > m$ gilt:

$$d(a, b) \leq d(x_n, y_n) + \sup_{k \geq m} d(x_k, a) + \sup_{k \geq m} d(y_k, b). \quad (168)$$

Also haben wir

$$d(a, b) \leq \inf_{n \geq m} d(x_n, y_n) + \sup_{k \geq m} d(x_k, a) + \sup_{k \geq m} d(y_k, b). \quad (169)$$

Grenzwertbildung auf beiden Seiten führt zu

$$d(a, b) \leq \liminf d(x_n, y_n) + \limsup d(x_k, a) + \limsup d(y_k, b) \leq \liminf d(x_n, y_n). \quad (170)$$

□

Definition 15.5. Eine Folge $\{x_n\}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\limsup_n \limsup_m d(x_n, x_m) = 0. \quad (171)$$

Satz 15.6. *Jede konvergent Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine Folge, die gegen x konvergiert. Nach dem vorigen Satz zweimal angewendet:

$$\limsup_n \limsup_m d(x_n, x_m) = \limsup_n d(x_n, x) = d(x, x) = 0. \quad (172)$$

□

Die Umkehrung des Satzes ist im Allgemeinen falsch. Betrachte zum Beispiel den metrischen Raum der dyadischen Zahlen \mathbb{Y} .

Definition 15.7. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge gegen ein Element in dem Raum konvergiert.

Beispiel. \mathbb{X}, \mathbb{R} und \mathbb{C} sind vollständig, \mathbb{Y} ist es nicht.

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und X die Menge der beschränkten Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit Betrag

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)| < \infty \quad (173)$$

und Abstand

$$\|f - g\|_\infty =: d(f, g). \quad (174)$$

Damit ist X ein metrischer Raum:

1. $\|f\|_\infty = \|-f\|_\infty$ folgt aus $|f(x)| = |-f(x)|$.
2. $\|f\|_\infty = 0 \iff \forall x \in D : f(x) = 0$.
3. $\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x \in D} |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Vollständigkeit von X : sei $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge und sei $x \in D$. Dann ist $\{f_n(x)\}$ eine Cauchy-Folge, da

$$\limsup_n \limsup_m |f_n(x) - f_m(x)| \leq \limsup_n \limsup_m \|f_n - f_m\|_\infty = 0. \quad (175)$$

Also $\exists y \in \mathbb{C}$ (weil \mathbb{C} vollständig ist):

$$\limsup_n d(f_n(x), y) = 0. \quad (176)$$

Nach Auswahlaxiom gibt es ein $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\limsup_n |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (177)$$

Nach Konstruktion ist es einfach zu sehen, dass f beschränkt ist. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \limsup \|f_n - f\|_\infty &= \limsup_n \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \limsup_n \sup_{x \in D} \limsup_m |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \limsup_n \limsup_m \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \limsup_n \limsup_m \|f_n - f_m\|_\infty = 0. \end{aligned} \quad (178)$$

Daher ist X vollständig.

Satz 15.8. *Definiere Y als den Raum der stetigen beschränkten Funktionen von D nach \mathbb{C} mit Betrag $\|\cdot\|_\infty$, dann ist Y auch vollständig.*

Erinnerung: f heißt stetig, falls $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$

$$\forall y \in D, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (179)$$

Beweis. Sei $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge in Y . Nach dem vorigen Satz gibt es ein $f \in X$ mit

$$\limsup_n \|f_n - f\|_\infty = 0. \quad (180)$$

Zu zeigen ist, dass f stetig ist: seien $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle n so, dass

$$\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/3. \quad (181)$$

Wähle δ so, dass

$$\forall y \in D, |x - y| < \delta : |f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon/3. \quad (182)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Man bezeichnet Y auch mit $C(D, \mathbb{C})$.

Bemerkung. Jetzt gibt es auch zwei Konvergenzbegriffe für X bzw. Y . Der alte Begriff ist punktweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ falls

$$\forall x : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (183)$$

Der neue Begriff ist Konvergenz in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ falls

$$\limsup_n \|f_n - f\|_\infty = 0. \quad (184)$$

Diese zwei Begriffe sind verschieden.

Beispiel.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0; \\ n \cdot x & \text{falls } 0 < x < 1/n; \\ 1 & \text{falls } x \geq 1/n. \end{cases}$$

Der punktweise Grenzwert ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0; \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass

$$\lim \|f_n - f\|_\infty \neq 0. \quad (185)$$

Ansonsten müsste der Grenzwert f nach Satz 15.8 stetig sein. Aber f ist nicht stetig bei $x = 0$.

◇ ————— Ende Vorlesung 27, 27.01.2015 ————— ◇

16 Stetige Funktionen und Stone-Weierstraß

Im Folgenden sei $D \subset \mathbb{R}$.

Definition 16.1. Seien $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen. Wir sagen, dass die Folge f_n

- *punktweise gegen f konvergiert*, wenn

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n : |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ und}$$

- *gleichmäßig gegen f konvergiert*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall x \in D \forall m > n : |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Die punktweise Konvergenz ist äquivalent zu

$$\forall x \in D \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Gleichmässige Konvergenz drücken wir mit dem Normsymbol $\|\cdot\|_\infty$ aus:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Man beachte, dass diese Aussagen jeweils die entsprechenden Aussagen mit \lim statt \limsup implizieren, da der \liminf stets kleiner-gleich dem \limsup ist. Die \limsup Formulierung hat jedoch den Vorteil, dass sie formal schwächer und somit einfacher zu beweisen ist.

Der Unterschied der Definitionen liegt in der Reihenfolge der Quantoren. Bei der gleichmäßigen Konvergenz verlangen, wir dass es für jedes ε ein n unabhängig von $x \in D$, man sagt auch *gleichmässig* in $x \in D$, gibt, während bei der punktweisen Konvergenz in jedem Punkt x ein anderes n gewählt werden darf. Man beachte, dass der gleichmässige Konvergenzbegriff wesentlich vom Definitionsbereich D abhängt.

Beispiel. Potenzreihen mit Konvergenzradius R konvergieren punktweise für $0 \leq |x| < R$ und gleichmässig für $0 \leq |x| < r < R$ bei fest gewähltem r . Potenzreihen konvergieren im Allgemeinen nicht gleichmässig auf ganz $0 \leq |x| < R$.

Der Begriff der Gleichmässigkeit ist ein vielerorts auftretendes Thema in der Mathematik. Er hängt stets mit Vertauschung von Quantoren zusammen.

Definition 16.2. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

- *gleichmässig stetig*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \forall y \in D, |y - x| < \delta : |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

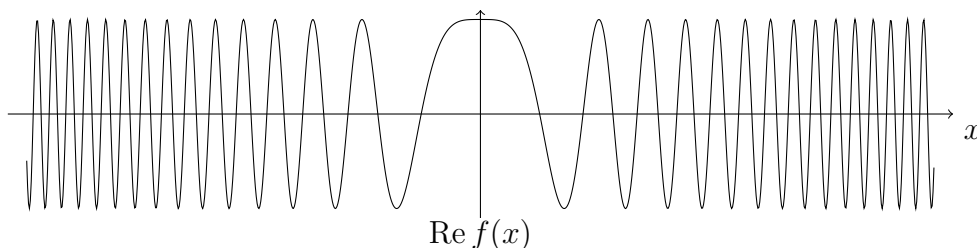
Zur Erinnerung: f ist

- *stetig*, falls

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D, |y - x| < \delta : |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Die gleichmässige Stetigkeit hängt ab vom Bereich D , auf dem wir die Funktion betrachten. Gleichmässig stetige Funktionen sind immer stetig. Umgekehrt ist dies im Allgemeinen nicht der Fall.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x) = e^{ix^2}$.



Die Funktion f ist reell analytisch, also auch stetig. Jedoch ist sie nicht gleichmässig stetig. Um dies zu zeigen, setze $\varepsilon = 1$ und sei $\delta > 0$ gegeben. Sei $x = \pi \cdot \delta^{-1}$ und $y = \sqrt{x^2 + \pi}$. Dann gilt

$$|x - y| = \sqrt{x^2 + \pi} - x = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + \pi} + x} < \frac{\pi}{x} = \delta \text{ und}$$

$$|e^{iy^2} - e^{ix^2}| = |e^{i(x^2 + \pi)} - e^{ix^2}| = |e^{ix^2}| |e^{i\pi} - 1| = 2 > 1 = \varepsilon. \quad \square$$

Satz 16.3. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist gleichmässig stetig.

Dies ist möglich aufgrund der Heine-Borel Eigenschaft von $[a, b]$. Man vergleiche dies mit dem Beispiel.

Beweis. Durch Widerspruch. Annahme:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in [a, b] \exists y \in [a, b], |y - x| < \delta : |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Sei ε wie in der Annahme. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ wähle $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$. Seien x_n, y_n wie in der Annahme, d.h. $|x_n - y_n| < \delta_n$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Nach dem

Satz von Heine-Borel gibt es eine konvergente Teilfolge x_{n_m} mit Grenzwert $x \in [a, b]$. Wir zeigen:

$$\exists \varepsilon' > 0 \forall \delta' > 0 \exists y \in [a, b], |y - x| < \delta' : |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon'.$$

Dies steht im Widerspruch zur Stetigkeit von f , also sind wir fertig, wenn wir das bewiesen haben. Setze $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$ und sei $\delta' > 0$ gegeben. Wähle m groß genug mit $|x_{n_m} - x| < \frac{\delta'}{3}$ und $\frac{1}{n_m} < \frac{\delta'}{3}$. Es gilt

$$|y_{n_m} - x| = |y_{n_m} - x_{n_m}| + |x_{n_m} - x| \leq \frac{2\delta'}{3} < \delta'.$$

Außerdem ist

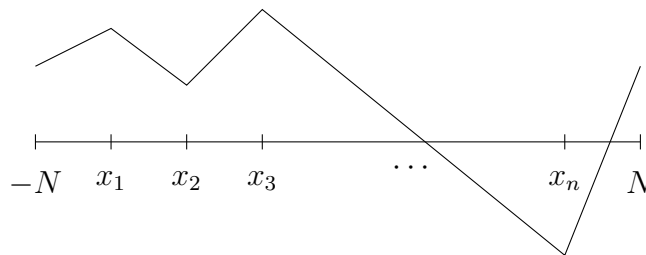
$$\varepsilon \leq |f(y_{n_m}) - f(x_{n_m})| \leq |f(y_{n_m}) - f(x)| + |f(x) - f(x_{n_m})|.$$

Also ist mindestens einer der beiden Summanden auf der rechten Seite größer als $\frac{\varepsilon}{3}$. Wähle dementsprechend $y = y_{n_m}$ oder $y = x_{n_m}$. \square

Satz 16.4 (Stone-Weierstraß). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Polynom g mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Der Satz besagt, dass die Menge der Polynome dicht im metrischen Raum $C([a, b], \mathbb{C})$ der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit arbeiten wir auf dem Intervall $[-N, N]$ (für N groß genug ist $[a, b] \subset [-N, N]$). Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zunächst zeigen wir, dass wir *lineare Splines* durch Polynome im Sinne des Satzes approximieren können. Ein *linearer Spline mit n Stützstellen* ist eine stückweise lineare, stetige Funktion, wobei $n + 1$ die Anzahl der linearen Teilstücke ist (siehe Bild).



Dann genügt es zu zeigen, dass stetige Funktionen durch lineare Splines approximiert werden können, um den Satz zu beweisen.

Die wesentliche Zutat für den ersten Schritt ist die Approximation der Betragsfunktion durch Polynome. Dazu definieren wir drei reell analytische Hilfsfunktionen:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n x^{2n}, \\
f_2(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2n+1} (-1)^n x^{2n+1}, \\
f_3(x) &= \int_0^x \int_0^t e^{-s^2} ds dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} (-1)^n x^{2n+2}.
\end{aligned}$$

Man bemerke, dass f_1 und f_3 gerade sind und f_2 ungerade ist. Die Taylorpolynome von f_1, f_2, f_3 haben allesamt Konvergenzradius ∞ . Also gibt es für alle $\varepsilon > 0$ und $N > 0$ Polynome (nämliche gerade die abgeschnittenen Taylorreihen) g_1, g_2, g_3 mit

$$\|f_j - g_j\|_{L^\infty([-N, N])} := \sup_{x \in [-N, N]} |f_j(x) - g_j(x)| < \varepsilon.$$

Dabei ist die Notation $\|\cdot\|_{L^\infty([-N, N])}$ zur Verdeutlichung der Abhängigkeit von N gewählt.

Die Idee ist, dass f_3 der Betragsfunktion ähnlich sieht. Dies drückt die folgende Abschätzung aus.

Behauptung. Es gibt $a, b > 0$ mit

$$ax - b \leq f_3(x) \leq ax \text{ für } x > 0.$$

Beweis der Behauptung. Es gilt $0 \leq e^{-x^2} \leq e \cdot e^{-x}$. Durch Integration erhalten wir

$$0 \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq e \int_0^x e^{-t} dt = e(1 - e^{-x}) \leq e.$$

Da $\int_0^x e^{-t^2} dt$ außerdem monoton wachsend ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t^2} dt =: a.$$

Weiter gilt

$$a - \int_0^x e^{-t^2} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_x^y e^{-t^2} dt \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_x^y e \cdot e^{-t} dt = e \cdot e^{-x}.$$

Also gilt

$$a - e \cdot e^{-x} \leq f_2(x) \leq a.$$

Durch Integration gelangen wir zu

$$ax - e + e \cdot e^{-x} \leq f_3(x) \leq ax.$$

Da $e \cdot e^{-x} > 0$ folgt die Behauptung mit $b = e$. □

Daraus folgt: es gibt für alle $\varepsilon > 0$, $N > 0$ ein gerades Polynom g mit

$$\forall 0 \leq x < N : ax - \varepsilon \leq g(x) \leq ax + \varepsilon.$$

Wähle nämlich M groß genug, sodass $M\varepsilon > 2e$ und sei \tilde{g} ein Polynom mit $\|f_3 - \tilde{g}\|_{L^\infty(-MN, MN)} < 1$. Dann setze $g(x) = M^{-1}\tilde{g}(Mx)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |ax - g(x)| &= M^{-1}|a \cdot (Mx) - \tilde{g}(Mx)| \\ &\leq M^{-1}(|a \cdot (Mx) - f_3(Mx)| + |f_3(Mx) - \tilde{g}(Mx)|) \\ &\leq M^{-1}(e + 1) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da g gerade ist gilt eine entsprechende Abschätzung für negative x (dabei muss natürlich x durch $|x|$ ersetzt werden). Also können wir jetzt die Betragsfunktion durch Polynome approximieren. Wir behaupten, dass wir dann auch lineare Splines mit n Stützstellen approximieren können. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n . Nämlich wählt man eine Funktion $\tilde{f}(x) = \tilde{a}|x - x_1|$ so, dass $f - \tilde{f}$ nur noch eine Stützstelle weniger hat. Dabei bezeichnet x_1 eine Stützstelle und \tilde{a} einen passenden Parameter. Dann kann man die Induktionsannahme und die Approximierbarkeit der Betragsfunktion auf die Zerlegung $f = (f - \tilde{f}) + \tilde{f}$ anwenden. Die Details, d.h. hauptsächlich die korrekte Wahl des Parameters \tilde{a} , bleiben dem Leser überlassen.

Behauptung. Für alle $f \in C([-N, N], \mathbb{C})$ existiert ein linearer Spline g mit

$$\|f - g\|_{L^\infty([-N, N])} \leq \varepsilon.$$

Beweis der Behauptung. Nach dem vorherigen Satz ist f gleichmässig stetig: es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [-N, N], |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (186)$$

Wähle k , sodass $2^{-k} < \frac{\delta}{2}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes lineares Spline g auf $[-N, N]$ zu den Stützstellen $n \cdot 2^{-k}$ (wobei n die natürlichen Zahlen von $-2^k N$ bis $2^k N$ durchläuft), sodass $g(n2^{-k}) = f(n2^{-k})$ gilt. Da

auch g gleichmässig stetig ist, gilt (186) auch für g . Nun sei zu gegebenem ε ein δ so gewählt, dass es (186) sowohl für f , als auch für g erfüllt (man wähle jeweils ein δ für f und für g und nehme dann das Größere der Beiden). Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - g(n2^{-k})| + |f(n2^{-k}) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

◇ ————— Ende Vorlesung 28, 29.01.2015 ————— ◇

Mit Dichtheitsaussagen wie dem Satz von Stone-Weierstraß kann man oft Sätze die in dem dichten Teilraum gelten übertragen auf den ganzen Raum. Notwendig dazu ist dass sich alle Begriffe, die in dem Satz auftreten, sich stetig in der benutzten Metrik verhalten. Wir zeigen einige Beispiele, zunächst die Konvergenz der rechtsseitigen Riemannschen Summen, die wir als für Polynome oder sogar reell analytische Funktionen als bewiesen ansehen und auf stetige Funktionen übertragen wollen.

Satz 16.5. *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann konvergiert die Folge*

$$R_k = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{b-a}{2^k} f\left(a + (b-a)\frac{n}{2^k}\right). \quad (187)$$

Beweis. Setze

$$\tilde{f}(x) := f\left(a + (b-a)x\right), \quad (188)$$

dann ist $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, und \tilde{f} ist stetig genau dann wenn f stetig ist. Nach Definition von R_k gilt

$$(b-a)R_k(\tilde{f}) = R_k(f). \quad (189)$$

Durch Anwendung dieser Transformation können wir O.B.d.A. annehmen dass $a = 0, b = 1$. Wir brauchen nur zu zeigen, dass R_k eine Cauchy-Folge ist. Sei $\epsilon > 0$, wähle ein Polynom g mit

$$\|f - g\|_{L^\infty([0,1])} < \epsilon/3. \quad (190)$$

Wähle n_0 so dass $\forall n, m > 0$:

$$\left| \underbrace{U_n g}_{=R_n g} - U_m g \right| < \epsilon/3. \quad (191)$$

Dann $\forall n, m > n_0$ gilt

$$|R_n f - R_m f| \leq \underbrace{|R_n f - U_n g|}_{=:I} + \underbrace{|U_n g - U_m g|}_{=:II} + \underbrace{|U_m g - R_m f|}_{=:III}. \quad (192)$$

Für den Term I erhalten wir

$$I = \left| \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{2^k} \left(f\left(\frac{n}{2^k}\right) - g\left(\frac{n}{2^k}\right) \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{\epsilon} < \frac{1}{\epsilon}. \quad (193)$$

Für den Term II , nach (191) es gilt dass $II < \epsilon/3$. Die Abschätzung für den Term III ist genau wie für den Term I . \square

Nach dem vorigen Satz können wir Integrale stetiger Funktionen definieren

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{k \rightarrow \infty} R_k f. \quad (194)$$

Satz 16.6. Seien $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann gilt

$$\left| \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \|f - g\|_\infty. \quad (195)$$

Bemerkung. Eine Funktion $T : M \rightarrow M'$ wobei M, M' zwei metrische Räume sind, heißt *Lipschitz* oder *Lipschitz-stetig*, falls $\exists c > 0$ mit

$$\forall x, y \in M : d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y). \quad (196)$$

Beweis. Nach Definition

$$|R_k f - R_k g| \leq \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{2^k} \left| f\left(\frac{n}{2^k}\right) - g\left(\frac{n}{2^k}\right) \right| \leq \|f - g\|_\infty, \quad (197)$$

also

$$|\lim R_k f - \lim R_k g| \leq \|f - g\|_\infty. \quad (198)$$

\square

Wir übertagen einen weitere Sachverhalte von reell analytischen Funktionen auf stetige Funktionen.

Satz 16.7. Seien $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $b \in (a, c)$, dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt. \quad (199)$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, wähle g ein Polynom mit

$$\|f - g\|_\infty < \epsilon/3. \quad (200)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^c f - \int_a^b f - \int_b^c f \right| \\ & \leq \underbrace{\left| \int_a^c g - \int_a^b g - \int_b^c g \right|}_{=0} + \underbrace{\left| \int_a^c (f - g) \right|}_{<(c-a)\epsilon/3} + \underbrace{\left| \int_a^b (f - g) \right|}_{<(b-a)\epsilon/3} + \underbrace{\left| \int_b^c (f - g) \right|}_{<(c-b)\epsilon/3}. \end{aligned} \quad (201)$$

Weil ϵ beliebig klein sein kann, ist die linke Seite von (201) null. \square

Satz 16.8 (Hauptsatz Teil I). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, definiere $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt. \quad (202)$$

Dann für alle $x \in [a, b]$, F ist differenzierbar an der Stelle x , mit

$$F'(x) = f(x). \quad (203)$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\forall x, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ so dass $\forall y$ mit $|y - x| < \delta$, gilt

$$|F(y) - F(x) - f(x)(y - x)| < \epsilon|y - x|. \quad (204)$$

Sei ϵ gegeben, wähle Polynom g mit

$$\|f - g\|_\infty < \epsilon/3. \quad (205)$$

Die entsprechende Abschätzung (204) ist schon gezeigt für Polynome g ,

$$\left| \int_a^y g(t) dt - \int_a^x g(t) dt - g(x)(y - x) \right| < \frac{\epsilon}{3}|y - x|. \quad (206)$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} & |F(y) - F(x) - f(x)(y - x)| \leq \left| \int_a^y g(t) dt - \int_a^x g(t) dt - g(x)(y - x) \right| \\ & + \left| \int_a^y (f - g) - \int_a^x (f - g) \right| + |g(x) - f(x)||y - x| \\ & \leq \frac{\epsilon}{3}|y - x| + \|f - g\|_\infty|y - x| + \|f - g\|_\infty|y - x| \leq \epsilon|y - x|. \end{aligned} \quad (207)$$

\square

Satz 16.9. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar an jeder Stelle $x \in [a, b]$. Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt

$$f(x) = f(a), \forall x \in [a, b]. \quad (208)$$

Beweis. Angenommen dass $\exists x : f(x) \neq f(a)$. O.B.d.A. $f(x) > f(a)$, der Fall $f(x) < f(a)$ wird analog gezeigt. Wir setzen $a_0 := a$ und $b_0 := x$. Wir wissen dass entweder

$$\frac{f(b_0) - f(\frac{a_0+b_0}{2})}{b_0 - \frac{a_0+b_0}{2}} \geq \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} \quad (209)$$

oder

$$\frac{f(\frac{a_0+b_0}{2}) - f(a_0)}{\frac{a_0+b_0}{2} - a_0} \geq \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} \quad (210)$$

Falls (209) gilt, definieren wir

$$a_1 := \frac{a_0 + b_0}{2}, b_1 := b_0. \quad (211)$$

Falls (210) gilt, definieren wir

$$a_1 := a_0, b_1 := \frac{a_0 + b_0}{2}. \quad (212)$$

Wir iterieren diese Konstruktion und erhalten rekursiv Folgen a_n und b_n mit

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (213)$$

Nach Heine-Borel, $\exists y \in [a, b]$ so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = y. \quad (214)$$

Nach (213) kann man für alle n zeigen

$$\frac{f(y) - f(a_n)}{y - a_n} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (215)$$

oder

$$\frac{f(b_n) - f(y)}{b_n - y} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (216)$$

Es folgt

$$f'(y) \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (217)$$

im Widerspruch zu $f'(y) = 0$. \square

Satz 16.10 (Hauptsatz Teil II). Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, d.h. $\forall x \in [a, b], \exists F'(x)$ und F' ist stetig. Setze $f := F'$, dann gilt

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a). \quad (218)$$

Beweis. Setze

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (219)$$

Zeige per $\epsilon/3$ Argument, dass

$$\left(\tilde{F}(x) - F(x)\right)' = 0. \quad (220)$$

Dann nach dem vorigen Satz, $\tilde{F} \equiv F$. □

Implizit taucht in dem letzten Satz der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ auf. Dieser hat die natürliche Metrik

$$d(F, G) := |(F - G)(a)| + \|F' - G'\|_\infty. \quad (221)$$

Er ist ein vollständig metrische Raum. Polynome sind dicht in diesem Raum, wie man leicht mithilfe des Satzes von Stone-Weierstraßbeweist.

17 Fouriersche Reihen

Wir betrachten die Riemannsche Sphäre

$$S^2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + c^2 = 1\}. \quad (222)$$

Es gibt eine Bijektion $f\mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, die wie folgt gegeben ist. Für $a + ib \in \mathbb{C}$ verbinden wir die zwei Punkten $(0, 0, 1)$ und $(a, b, 0)$ durch eine Gerade. Den (eindeutigen) Schnittpunkt dieser Geraden mit $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ nennen wir $f(a + ib)$. Wir können den Schnittpunkt auch leicht explizit angeben: er ist nämlich von der Form

$$\lambda(a, b, 0) + (1 - \lambda)(0, 0, 1). \quad (223)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 1. \quad (224)$$

Daraus folgt

$$\lambda = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}, \quad (225)$$

also

$$f(a + ib) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right). \quad (226)$$

Die Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \bar{z} \quad (227)$$

entspricht einerseits einer Spiegelung der komplexen Ebene an der reellen Achse, andererseits aber auch einer Spiegelung der Riemannschen Sphäre an der Ebene $y = 0$. Etwas komplizierter zu sehen ist, dass die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$g(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (228)$$

einer Spiegelung von $S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ an der Ebene $\{(x, y, z) : z = 0\}$ entspricht. Wir haben nämlich für $z = a + ib$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}, \quad (229)$$

d.h.

$$f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{1 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2 + 1} \right). \quad (230)$$

Allgemeiner sieht man dass wle Drehungen der Riemannschen Sphäre entsprechen einer komplexen Abbildung der Form

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (231)$$

entsprechen, wir überlassen dies als Übung.

Durch Zusammensetzen zweier Spiegelungen sieht man, dass die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$g(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (232)$$

einer Drehung von $S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ um die Achse $y = z = 0$ entspricht mit dem Drehwinkel π . Dies verdeutlicht eine elegante Symmetrie der komplexen Zahlen unter der Abbildung $z \rightarrow z^{-1}$.

Wir erinnern uns, dass eine Laurentreihe gegeben ist durch

$$\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n. \quad (233)$$

Mithilfe der Abbildung $z \rightarrow 1/z$ können wir auch Reihen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^m a_n z^n \quad (234)$$

erhalten. Wenn die Reihen (233) und (234) einen Konvergenzradius größer als eins haben, dann ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (235)$$

für $|z| = 1$ wohldefiniert. Eine solche Reihe (235) für $|z| = 1$ heißt *Fourierische Reihe*. Ein spannender Grenzfall ist, wenn beide obigen Reihen gerade Konvergenzradius 1 haben, dann kann die Fourierreihe konvergieren, muss aber nicht.

◇ ————— Ende Vorlesung 29, 03.02.2015 ————— ◇

Wir betrachten Laurent-Polynome der Form

$$g(z) = \sum_{n=-N}^N a_n z^n$$

auf dem Einheitskreis $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Die Funktion g kann auch als eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachtet werden:

$$f(\varphi) := g(e^{i\varphi}) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{i\varphi n}.$$

Es gilt $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$, f ist 2π -periodisch und daher eindeutig bestimmt durch die Werte $f(\varphi)$ für $\varphi \in [-\pi, \pi)$ bzw. $\varphi \in [0, 2\pi)$. Mithilfe der Eulerschen Formel können wir f auch als trigonometrisches Polynom schreiben, d.h. als Linearkombination der Funktionen $\cos(nx)$, $\sin(nx)$:

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \sum_{n=-N}^N a_n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^N \underbrace{(a_n + a_{-n})}_{=: b_n} \cos(n\varphi) + i \sum_{n=1}^N \underbrace{(a_n - a_{-n})}_{=: c_n} \sin(n\varphi) \end{aligned}$$

Es gilt

$$a_n = \frac{1}{2} \left(b_n + \frac{c_n}{i} \right), \quad a_{-n} = \frac{1}{2} \left(b_n - \frac{c_n}{i} \right).$$

Beispiel. Für $N \in \mathbb{N}$ sei

$$D_N(\varphi) = \sum_{n=-N}^N e^{in\varphi}.$$

Diese Folge trigonometrischer Polynome wird als Folge der *Dirichlet-Kerne* bezeichnet. Es gilt analog zum Summationstrick für geometrische Reihen:

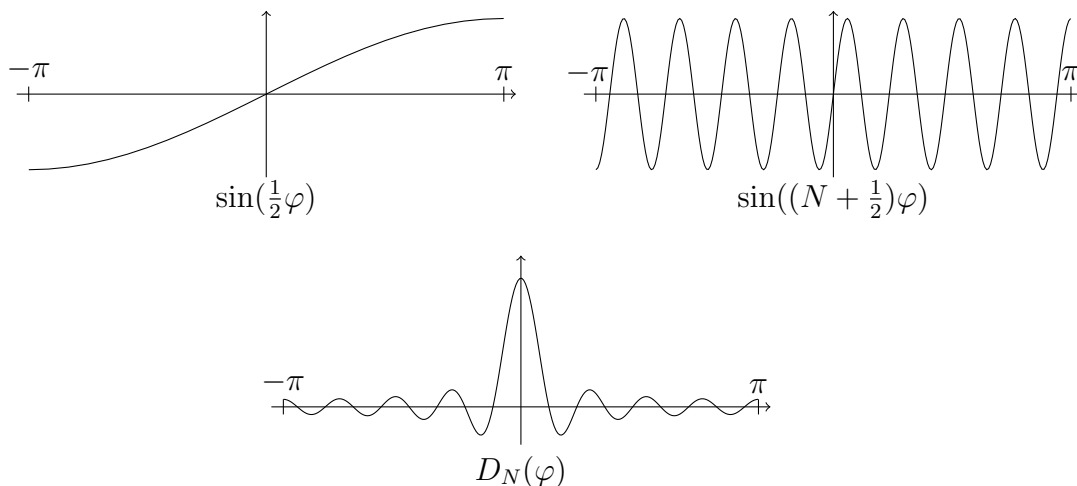
$$D_N(\varphi)e^{i\frac{\varphi}{2}} - D_N(\varphi)e^{-i\frac{\varphi}{2}} = e^{i(N+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\varphi}$$

und daher ist

$$D_N(\varphi) = \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)},$$

falls $e^{i\varphi} \neq 1$. Falls andererseits $e^{i\varphi} = 1$ gilt, dann ist

$$D_N(\varphi) = \sum_{n=-N}^N 1^n = 2N + 1.$$



Sei $f(\varphi) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{i\varphi n}$ ein trigonometrisches Polynom. Die Ableitung ist wieder ein trigonometrisches Polynom:

$$f'(\varphi) = \sum_{n=-N}^N a_n i n e^{i\varphi n}.$$

Falls $a_0 = 0$, ist auch die Stammfunktion wieder ein trigonometrisches Polynom:

$$F(\varphi) = \sum_{n=-N}^N a_n \frac{1}{in} e^{i\varphi n}.$$

Falls $a_0 \neq 0$ verlassen wir durch Stammfunktionbildung die Klasse der trigonometrischen Polynome.

Übung. Falls $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische Funktion ist, so gilt

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} f(t) dt.$$

Es sei $I = \int_0^{2\pi} e^{int} dt$. Dann gilt

$$I = \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} e^{int} dt = \int_0^{2\pi} e^{in(s+\varphi)} ds = e^{in\varphi} \int_0^{2\pi} e^{ins} ds = e^{in\varphi} I$$

Also ist $I(1 - e^{in\varphi}) = 0$. Falls $n \neq 0$, ist also $I(1 - e^i) = 0$, d.h.

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0.$$

Damit können wir das Integral eines trigonometrischen Polynoms über $[0, 2\pi]$ berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^N a_n e^{int} dt = \int_0^{2\pi} a_0 dt = 2\pi a_0.$$

Satz 17.1 (Stone-Weierstraß). *Die Menge der trigonometrischen Polynome ist dicht im Raum der 2π -periodischen, stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Metrik $\|f - g\|_{\infty}$.*

Beweisskizze. Der Beweis erfolgt ähnlich wie der Beweis des entsprechenden Satzes für Polynome. Es genügt zu zeigen, dass lineare Splines durch trigonometrische Polynome approximiert werden können. Wir definieren zuerst eine positive um 0 zentrierte Funktion durch

$$\begin{aligned} F_N(\varphi) &= \frac{1}{2N+1} D_N(\varphi)^2 = \frac{1}{2N+1} \left(\sum_{n=-N}^N e^{in\varphi} \right) \left(\sum_{m=-N}^N e^{im\varphi} \right) \\ &= \sum_{n=-2N}^{2N} \underbrace{\frac{2N+1-2|n|}{2N+1}}_{=:b_n} e^{in\varphi} \end{aligned}$$

Es gilt $\int_0^{2\pi} F_N(t) dt = 2\pi b_0 = 2\pi$. Insbesondere ist das Integral unabhängig von N . Weiter gilt für $0 < \varepsilon < \varphi < \pi$ die Abschätzung

$$F_N(\varphi) \leq \frac{1}{2N+1} \frac{1}{(\sin \frac{\varepsilon}{2})^2},$$

d.h. F_N wird klein bei Entfernung vom Ursprung. Durch Subtrahieren eines um ein gewisses φ_0 verschobenen F_0 erhalten wir eine Funktion mit verschwindendem Integral:

$$F_N(\varphi) - F_N(\varphi - \varphi_0).$$

Durch zweimaliges Integrieren dieser Funktion erhalten wir gute Approximationen für eine stetige, stückweise lineare 2π -periodische Funktion mit Stützpunkten $0, \varphi_0$, die nicht identisch gleich Null ist. Per Induktion lässt sich nun beweisen, dass jede stetige stückweise lineare 2π -periodische Funktion durch trigonometrische Polynome approximiert werden kann. \square

Satz 17.2. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige, 2π -periodische Funktion und sei

$$P_m(\varphi) = \sum_{n=-N_m}^{N_m} a_{m,n} e^{in\varphi}$$

eine Folge von trigonometrischen Polynomen mit

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|f - P_m\|_{\infty} = 0.$$

Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Der Beweis dieses Satzes ist eine Übungsaufgabe.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige, 2π -periodische Funktion.

Definition 17.3. Die Zahlen

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

heißen die *Fourier-Koeffizienten* von f .

Seien a_n die Fourier-Koeffizienten von f . Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$$

im Allgemeinen *nicht* gegen f , weder im gleichmäßigen, noch im punktweisen Sinne. Allerdings konvergiert die Reihe gegen f in der L^2 -Norm

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

◆ ————— Ende Vorlesung 30, 05.02.2015 ————— ◆