

Analysis 1, Übungsblatt Nr. 14

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15



Freiwillige Abgabe in der Vorlesung am 05.02.2015.
Pro Aufgabe sind 10 **Bonuspunkte** erreichbar.

Aufgabe 1 (Integration). Seien $a, b \in (0, \infty)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

mithilfe eines angemessenen Integrales.

Aufgabe 2 (Partialbruchzerlegung). Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Aufgabe 3 (Stirlingsche Formel, 1. Teil). Nehmen Sie an, dass

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{\sqrt{nn^n}}$$

existiert und positiv ist. Zeigen Sie: $L = \sqrt{2\pi}$. *Hinweis.* Wallissches Integral.

Aufgabe 4 (Gaußsches Integral). (a) Beweisen Sie:

$$(a_1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall t \in (0, \infty) : t \leq n \Rightarrow \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t};$$
$$(a_2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall t \in (0, \infty) : e^{-t} \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n}.$$

(b) Berechnen Sie:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aufgabe 5 (Leibniz'sche Reihe). Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \text{ für } 0 < x < 2\pi.$$

Beweisen Sie damit die Formel

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots \quad (1)$$

Aufgabe 6 (Leibniz'sche Reihe II). Zeigen Sie:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} r^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Geben Sie einen zweiten Beweis für die Formel (1) der Leibniz'schen Reihe.