Analysis 1, Übungsblatt Nr. 13

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe in der Vorlesung am 29.01.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen)**.** Beweisen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 < \theta < 2\pi$ gilt

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Aufgabe 2 (Taylorsche Formel und Lagrangesche Form des Restglieds)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein aus mehr als einem Punkt bestehendes Intervall, sei $a \in I$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie: Für alle $x \in I$ gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

(b) Beweisen Sie: es existiert $\xi \in [a,x]$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Aufgabe 3 (Binomische Reihe)**.** Seien $\alpha, x \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie: Für alle $|x| < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \tag{1}$$

wobei $\binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k}$.

(b) Zeigen Sie zusätzlich:

(b.1) Für $\alpha \geq 0$ konvergiert die binomische Reihe (1) absolut und gleichmäßig im Intervall $[-1,1]$.

(b.2) Für $-1 < \alpha < 0$ konvergiert die binomische Reihe (1) für $x = +1$ und divergiert für $x = -1$.

(b.3) Für $\alpha \leq -1$ divergiert die binomische Reihe (1) sowohl für $x = +1$ als auch für $x = -1$.

Aufgabe 4 (Beta-Funktion)**.** Die Beta-Funktion ist für $x, y \in (0,\infty)$ definiert durch

$$\mathrm{B}(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses uneigentliche Integral konvergiert.

(b) Beweisen Sie: Für festes $y > 0$ ist die Funktion $x \mapsto \mathrm{B}(x,y)$ auf $(0,\infty)$ logarithmisch konvex und genügt der Funktionalgleichung

$$x\mathrm{B}(x,y) = (x+y)\mathrm{B}(x+1,y).$$

(c) Beweisen Sie die Formel

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{für alle } x, y > 0.$$