

# Analysis 1, Übungsblatt Nr. 11

Mathematisches Institut  
Prof. Dr. Christoph Thiele  
Dr. Diogo Oliveira e Silva  
Wintersemester 2014/15



## Abgabe in der Vorlesung am 15.01.2015.

Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

**Aufgabe 1** (Komplexe Zahlen). (a) Bestimmen Sie Betrag, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen

$$(a_1) \frac{1+2i}{3-4i} \quad (a_2) \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2015} \quad (a_3) \sqrt{i} \quad (a_4) \cos(i).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle  $\zeta, \eta \in \mathbb{C}$

$$|1 - \bar{\zeta}\eta|^2 - |\zeta - \eta|^2 = (1 - |\zeta|^2)(1 - |\eta|^2).$$

(c) Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichungen

$$(c_1) z^4 - 2z^2 + 4 = 0 \quad (c_2) e^z = i.$$

**Aufgabe 2** (Potenzreihen). (a) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  den Konvergenzradius:

$$a_n = 3^{\frac{n}{2}} \exp(-n), \quad a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad a_n = \frac{n^3 \sin n}{3^n}, \quad a_n = n \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2}.$$

(b) Die Konvergenzradien der Potenzreihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$  seien  $r_a$  bzw.  $r_b$ . Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) x^n$  einen Konvergenzradius  $r$  mit

$$r \geq r_a \cdot r_b$$

hat.

**Aufgabe 3** (Partielle Integration). (a) Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei reell analytische Funktionen. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

(b) Berechnen Sie:

(b<sub>1</sub>) Für  $m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx.$$

(b<sub>2</sub>) Für  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx.$$

**Aufgabe 4** (Mittelwertsatz und eine Verallgemeinerung). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und im Intervall  $(a, b)$  stetig differenzierbar. Weiter sei  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ .

(a) Zeigen Sie: es existiert ein  $x_1 \in (a, b)$  mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1).$$

(b) Zeigen Sie: dann ist  $g(b) \neq g(a)$  und es existiert ein  $x_2 \in (a, b)$  mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}.$$