

Analysis 1, Übungsblatt Nr. 7

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15



Abgabe in der Vorlesung am 27.11.2014.

Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Folgen: $\sup$, $\inf$, $\limsup$, $\liminf$). Bestimmen Sie mit Begründung $\sup\{x_n : n \geq 1\}$, $\inf\{x_n : n \geq 1\}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_n : n \geq 1\}$, sowie $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{x_n : n \geq 1\}$ für die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$, wenn

(a) $x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n}\right)$,

(b) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

(c) $x_n = n^{(-1)^n}$.

Aufgabe 2 (Reihen). Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$.

Aufgabe 3 (Fubini ohne Tonelli). Nennen Sie ein Beispiel f von einer Folge von Folgen

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

so dass

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(m) < \infty \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) < \infty,$$

aber

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(m) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m).$$

Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 4 (Konvergente Reihe). Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{falls die Dezimaldarstellung von } n \text{ keine Ziffer 9 enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$$

konvergiert.