Analysis 1, Übungsblatt Nr. 4

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe in der Vorlesung am 06.11.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Mächtigkeit)**.** Zeigen Sie:

(a) Die Menge aller Funktionen $f : I_2 \to \mathbb{N}$ ist abzählbar.

(b) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

(c) Es gibt keine ordnungserhaltende Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$, d.h. keine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft
$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n < m \Rightarrow \varphi(n) < \varphi(m).$$

Aufgabe 2 (Rekursion/Iteration)**.** Seien n, m, k natürliche Zahlen, und seien g eine Funktion mit $\mathrm{Ran}(g) \subset \mathrm{Dom}(g)$ und $p \in \mathrm{Dom}(g)$.
Wie in der Vorlesung definieren wir $g^k(p)$ durch Rekursion mithilfe von dem Satz 1.22: Diesen Satz können wir insbesondere auf die Funktion g mit einem Startwert p anwenden. Für die erhaltene Funktion h verwenden wir die übliche Notation $g^k(p) := h(k)$.
Beweisen Sie mit den Methoden des Skriptes bis Vorlesung 5:

(a) $g^{n+m}(p) = g^n(g^m(p))$;

(b) $(n + m) + k = n + (m + k)$.

Aufgabe 3 (Surjektivität und Injektivität)**.** Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Falls f surjektiv ist, so existiert eine injektive Function $g : Y \to X$, so dass $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

(b) Falls f injektiv ist, so existiert eine surjektive Function $g : Y \to X$, so dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 4 (GM-AM Ungleichung)**.** Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Beweisen Sie die folgende Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel:
$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leq \Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\Big)^n.$$
Unter welchen Bedingungen gilt Gleichheit? Beweisen Sie Ihre Behauptung!