Analysis 1, Übungsblatt Nr. 3

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe in der Vorlesung am 30.10.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Binomialkoeffizienten)**.** Für eine natürliche Zahl n ist $n!$ (sprich n-*Fakultät*) so definiert, dass

$$0! = 1 \ ,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)! = (n+1)n! \ .$$

Für natürliche Zahlen n und k mit $k \leq n$ definiert man den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \ \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \ .$$

(b) Beweisen Sie durch Induktion nach n, dass für alle $k \leq n$ der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ eine natürliche Zahl ist.

(c) Zeigen Sie durch Induktion nach n: für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Aufgabe 2 (Ungleichungen)**.** Sei $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

(b) es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$

$$n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n;$$

(c) für $k \in \{2, 3, \dots, n\}$

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}};$$

(d) $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$.

(e) Folgern Sie, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$

$$n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Damit haben wir eine Approximation für $n!$ erhalten, die uns in der nahen Zukunft notwendig sein wird.

Aufgabe 3 (Peano Axiome, revisited)**.** In der Vorlesung haben wir die natürlichen Zahlen formal wie folgt eingeführt: Es gibt Objekte 0 und ν, so dass die folgenden fünf Eigenschaften erfüllt sind:

(P1) $\nu(0) \neq \nu$

(P2) $\forall x : \nu(x) \neq 0$

(P3) $\forall x \forall y : \nu(x) = \nu \vee \nu(x) \neq \nu(y) \vee x = y$

(P4) $\forall x \forall y : \nu(x) \neq y \vee y = \nu \vee \nu(y) \neq \nu$

(P5) Ist f eine Funktion mit $\forall x \forall y : f(0) \neq f \wedge (\nu(x) = \nu \vee f(x) = f \vee \nu(x) \neq y \vee f(y) \neq f)$. Dann können wir $\forall x : f(x) \neq f \vee \nu(x) = \nu$ folgern.

Beweisen Sie mit den Regeln des Skriptes die Aussage $\forall x \exists y : \nu(x) = \nu \vee x = 0 \vee \nu(y) = x$, die umgangssprachlich besagt, dass jede natürliche Zahl außer der Null Nachfolger einer natürlichen Zahl ist. Verwenden Sie die Schritte:

(a) Zeigen Sie die Existenz einer Funktion f, deren Definitionsbereich gerade diejenigen natürlichen Zahlen sind, die gleich Null oder Nachfolger einer natürlichen Zahl sind.

(b) Zeigen Sie, dass der Definitionsbereich von f denjenigen von ν enthält.

Aufgabe 4 (Identitätsfunktionen)**.** Sei N eine natürliche Zahl. Wie im Skript untersuchen wir Funktionen φ, die die folgenden sechs Eigenschaften erfüllen:

(I1) $\forall x : \varphi(x) = x \vee \varphi(x) = \varphi$

(I2) $\varphi(0) \neq \varphi$

(I3) $\varphi(N) = \varphi$

(I4) $\nu(x) = \nu \Rightarrow \varphi(x) = \varphi$

(I5) $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : (\nu(x) \neq N \wedge \varphi(x) \neq \varphi \wedge \nu(x) = y) \Rightarrow \varphi(y) \neq \varphi$

(I6) $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : (\varphi(x) = \varphi \wedge \nu(x) = y) \Rightarrow \varphi(y) = \varphi$

Beweisen Sie mit den Methoden des Skriptes bis Vorlesung 4: für gegebenes N *gibt es höchstens eine Funktion*, die die obigen Eigenschaften erfüllt. Dies ist so zu verstehen, dass wenn φ und $\tilde{\varphi}$ zwei Funktionen sind, die die obigen Eigenschaften erfüllen, dann folgt $\varphi = \widetilde{\varphi}$.